This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

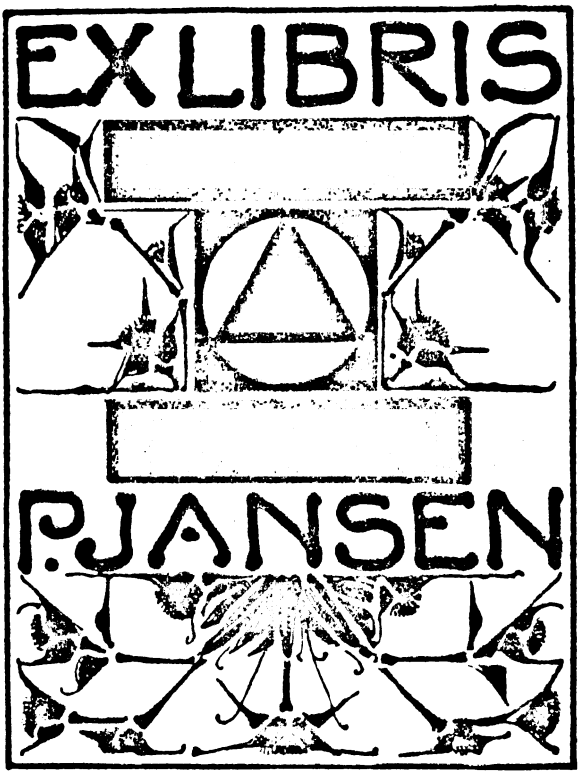
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



I. **Einführung in die Theorie des Magnetismus.** Von Dr. R. Gans, Prof. a. d. Universität Tübingen. Mit 40 Fig. 1908. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ 2.80.

II. **Elektromagnet. Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln.** Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Figuren. 1908. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ. 2.80.

III. **Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus.** Von Dr. Cl. Schaefer, Privatdoz. a. d. Univ. Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells u. 32 Figuren. 1908. Geh. ℳ 3.40, geb. ℳ 3.80.

IV. **Die Theorie der Besselschen Funktionen.** Von Dr. P. Schafheitlin, Prof. am Sophien-Realgymnasium zu Berlin. Mit 1 Figurentafel. 1908. Geh. ℳ 2.80, geb. ℳ 3.20.

V. **Funktionentafeln mit Formeln u. Kurven.** Von Dr. E. Jahnke, Prof. a. d. Kgl. Bergakademie Berlin, u. F. Emde, Ingenieur in Berlin. 1909. Geh. ℳ 6.—

...ten. 20:110.

...SITY OF MICHIGAN LIBRARIES

VI, 1 u. 2. **Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik.** Von Dr. W. v. Ignatowsky in Berlin. I. Teil. Mit 27 Fig. 1909. Geh. *M.* 2.60, geb. *M.* 3.—. II. Teil. Mit 14 Figuren. 1910. Geh. *M.* 2.60, geb. *M.* 3.—

VII. **Theorie d. Kräftepläne.** Von Dr. H. E. Timerding, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Braunschweig. Mit 40 Fig. 1910. Geh. *M.* 2.60, geb. *M.* 3.—

VIII. **Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse.** Von Dr. P. Schwahn, Direktor der Gesellschaft und Sternwarte „Urania" i. Berlin.

In Vorbereitung:

Grundlagen des Schiffbaues. Von O. Alt, Diplom-Ing. in Kiel.

Gastheorie. Von Dr. A. Byk, Privatdozent a. d. Universität u. Techn. Hochschule Berlin.

Die mathematischen Instrumente. Von Dr. A. Galle, Prof. a. Geodät. Institut b. Berlin.

Potentialtheorie. Von Dr. R. Gans, Professor an der Universität Tübingen.

Getriebelehre. Von Staatsrat Dr. M. Grübler, Professor an der Techn. Hochschule Dresden.

Schwingungsprobleme. Von Dr. E. Grüneisen, Privatdozent an der Universität Berlin.

Akustik. Von Dr. A. Kalähne, Prof. a. d. Technischen Hochschule zu Danzig.

Festigkeitsprobleme der modernen Maschinentechnik. Von Dr. Th. von Karman an der Universität Göttingen.

Thermoelektrizität. Von Dr. F. Krüger, Privatdoz. an der Univ. Göttingen.

Konforme Abbildung. Von L. Lewent, Oberlehrer in Berlin.

Über Berechnung spezieller elektrischer und magnetischer Felder. Von Dr.-Ing. u. Dr. phil. L. Lichtenstein in Charlottenburg.

Einführung in die Elastizitätstheorie. Von R. Marcolongo, Prof. an der Univ. Neapel.

Technische Hydromechanik. Von Dr. R. Edler von Mises, Ingenieur in Straßburg i. E.

Grundlagen der Zeit- und Ortsbestimmungen. Von Dr. J. Möller, Oberlehr. i. Elsfleth.

Die Determinanten. Von Geh. Hofrat Dr. E. Netto, Prof. an der Universität Gießen.

Die Grundlagen der Wechselstromtechnik. Von Prof. Dr. E. Orlich, Mitglied der Physik.-Techn. Reichsanstalt Charlottenburg.

Die Streuung des Transformators. Von Dr.-Ing. W. Rogowski a. d. Physik.-Techn. Reichsanst. Charlottenburg.

Die Fourierschen Reihen. Von Dr. R. Rothe, Prof. a. d. Kgl. Bergakademie Clausthal.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von Dr. R. Rothe, Professor an der Kgl. Bergakademie Clausthal.

Elektromagnetische Schwingungen. Von Dr.-Ing. R. Rüdenberg in Berlin.

Die Theorie der Ionisation der Gase. Von Dr. G. Rümelin, Privatdoz. a. d. Univ. Freiburg.

Seismik. Von Dr. H. Schering an der Physik.-Techn. Reichsanstalt Charlottenburg.

Die Wechselstrommotoren. Von J. Sumec, Prof. a. d. Techn. Hochschule Brünn.

Temperaturmessungen. Von Dr. S. Valentiner, Dozent a. d. Techn. Hochschule Hannover.

☞ Die Sammlung wird fortgesetzt.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
8

MATHEMATISCHE THEORIE DER ASTRONOMISCHEN FINSTERNISSE

VON

DR. PAUL SCHWAHN
DIREKTOR DER URANIA IN BERLIN

MIT 20 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

ASTRONOMY
G3
.75
.B3

COPYRIGHT 1910 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

51-21426
~~Math~~
Transferred
astronomy
3.9.72

VORWORT.

Die in diesem Band der Jahnkeschen Sammlung mathematisch-physikalischer Schriften behandelte Theorie der astronomischen Finsternisse bildet einen Teil von Vorlesungen über sphärische Astronomie, welche der Verfasser vor zwei Jahren auf der Uraniasternwarte zu Berlin vor einem Kreis mathematisch geschulter und astronomisch interessierter Zuhörer gehalten hat. Zur Herausgabe gerade dieses Teils wurde der Verfasser veranlaßt durch den Umstand, daß die Theorie der Finsternisse in den astronomischen Handbüchern mit Ausnahme des jetzt fast vergriffenen Manual of Spherical and Practical Astronomy von Chauvenet nur unvollständig oder doch nur im Hinblick auf ihre Anwendung für die Längenbestimmung behandelt ist. Im Gegensatz hierzu beschäftigt sich die vorliegende Darstellung ausschließlich mit der Prädiktion der Mond- und Sonnenfinsternisse, Planetenvorübergänge und Sternbedeckungen, d. i. mit demjenigen Teil der Finsternisse, welcher von den Berechnern der astronomischen Ephemeriden erledigt wird. Zu gunsten der mathematisch eleganten Besselschen Theorie der Sonnenfinsternisse mußte auf die Hansensche Theorie Verzicht geleistet werden. Zahlreiche orientierende Figuren und sehr ausführlich behandelte Rechnungsbeispiele sind den theoretischen Erörterungen beigegeben worden. So dürfte das kleine Werk für die Studierenden der Astronomie und die astronomisch geschulten Lehrer höherer Lehranstalten ein praktischer Ratgeber sein.

Berlin, im Oktober 1909.

DER VERFASSER.

INHALTSVERZEICHNIS.

I. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Mondfinsternisse.

Seite

1. Länge des Schattenkegels der Erde 1
2. Bedingungen für das Zustandekommen einer Mondfinsternis 2
3. Die Distanz zwischen Mondmittelpunkt und Mittelpunkt des Schattenkegels 5
4. Die verschiedenen Umlaufszeiten des Mondes und der chaldäische Saroszyklus. Prädiktion der Mond- und Sonnenfinsternisse 7
5. Bestimmung der Oppositionszeit von Sonne und Mond für die Finsternis 1906 Febr. 8. 11
6. Berechnung der Phasen einer Mondfinsternis 13
7. Berechnung der Phasen der totalen Mondfinsternis 1906 Febr. 8. 19
8. Lage des Mondzenits bei Anfang und Ende der Finsternis . 22

II. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe.

9. Bedingungen für das Zustandekommen eines Vorüberganges. Periodizität der Vorübergänge 23
10. Berechnung der Phasen eines Merkur- oder Venusdurchgangs für den Mittelpunkt der Erde 30
11. Berechnung der Phasen des Merkurdurchgangs 1907 Nov. 13—14 für den Erdmittelpunkt 31
12. Berechnung der Phasen eines Merkur- oder Venusdurchgangs für einen Ort der Erdoberfläche 35

III. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse.

13. Dimensionen des Schattenkegels des Mondes. Allgemeines über den Verlauf einer Sonnenfinsternis 46
14. Bedingungen für das Zustandekommen einer Sonnenfinsternis 54
15. Die Fundamentalgleichungen der Besselschen Theorie der Sonnenfinsternisse 56

Seite

16. Die Besselschen Elemente der ringförmigen Sonnenfinsternis 1908 Juni 28 66
17. Berechnung der Phasen einer Sonnenfinsternis:
A. Anfang und Ende der Finsternis überhaupt 74
B. Anfang und Ende der totalen oder ringförmigen Finsternis überhaupt 80
C. Anfang und Ende der zentralen Finsternis überhaupt . . 80
D. Zentrale Finsternis im wahren Mittag 82
18. Berechnung der Grenzen des Sichtbarkeitsbereichs einer Sonnenfinsternis:
A. Westliche und östliche Grenzlinien 84
B. Nördliche und südliche Grenzlinien 87
19. Die Kurve der zentralen Verfinsterung 98
20. Dauer der totalen oder ringförmigen Finsternis 99
21. Die Übersichtskarte der Sonnenfinsternis 101
22. Prädiktion der Phasen einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Erdort innerhalb des Sichtbarkeitsbereichs 103

IV. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Sternbedeckungen durch den Mond.

23. Bedingungen für das Zustandekommen einer Sternbedeckung 114
24. Gleichungen für die Berechnung einer Sternbedeckung . . . 114
25. Berechnung der Elemente der Sternbedeckungen. 118
26. Grenzen für die Sichtbarkeit einer Sternbedeckung . . . 120
27. Prädiktion der Phasen einer Sternbedeckung für einen gegebenen Erdort innerhalb des Sichtbarkeitsbereiches . . 125

I. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Mondfinsternisse.

1. Länge des Schattenkegels der Erde.

Für das Zustandekommen einer Mondfinsternis ist es notwendig, daß der Schattenkegel der Erde den Mond erreicht, d. h. daß die Länge dieses Schattenkegels größer ist als die maximale Entfernung des Mondes von der Erde. Dies ist in der Tat der Fall, wie folgende Betrachtung zeigt:

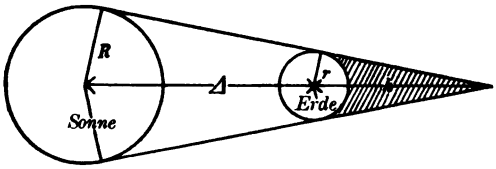


Fig. 1.

Es sei in Fig. 1 Δ die Entfernung der Erde von der Sonne, R der Radius des Sonnenballs, r derjenige des Erdballs und h die Länge des Schattenkegels zwischen seiner Spitze und dem Erdmittelpunkt. Es besteht dann die Proportion:

$$\frac{h}{\Delta + h} = \frac{r}{R}, \quad \text{woraus folgt:} \quad h = \frac{r}{\frac{R}{\Delta} - \frac{r}{\Delta}}.$$

Nun ist, wenn $H_\odot$ den scheinbaren Halbmesser der Sonne, $\pi_\odot$ die Horizontalparallaxe der Sonne darstellt (Fig. 2),

$$\sin H_\odot = \frac{R}{\Delta}$$

und

$$\sin \pi_\odot = \frac{r}{\Delta},$$

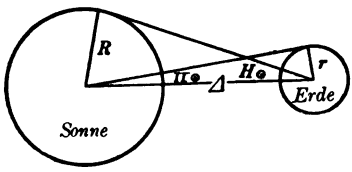


Fig. 2.

oder wegen der Kleinheit der Winkel $H_\odot$ und $\pi_\odot$:

$$H_\odot = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{R}{\Delta} \quad \text{und} \quad \pi_\odot = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{r}{\Delta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin 1''} = 206265''\right),$$

also:

$$h = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{r}{H_\odot - \pi_\odot} = \frac{206265''}{H_\odot - \pi_\odot} \cdot r.$$

$H_\odot$ variiert zwischen $16'18'' = 978''$ und $15'45'' = 945''$, $\pi_\odot$ ist rund $9''$. Der kleinste Wert von h wird also:

$$h_{\text{min.}} = \frac{206265''}{978'' - 9''} r = 213 \cdot r.$$

Man ersieht hieraus, daß der Erdschatten 213mal so lang wie der Erdradius ist. Da nun die Entfernung des Mondes im Apogäum $63{,}7 \cdot r$ beträgt, so wird der Erdschatten den Mond erreichen können, d. h. das Zustandekommen einer Mondfinsternis ist denkbar.

2. Bedingungen für das Zustandekommen einer Mondfinsternis.

Die zweite Bedingung für das Zustandekommen einer Mondfinsternis ist die, daß an dem betreffenden Tage der Mond in Opposition mit der Sonne steht, d. h. daß die durch den Sonnen- und Erdmittelpunkt gelegte Ebene auch den Mondmittelpunkt enthält, oder in anderen Worten, daß die Rektaszensionen der Sonne und des Mondes sich an dem betreffenden Tage um $12^h = 180^0$ unterscheiden.

Sind $\alpha_\odot$ und $\delta_\odot$ die Rektaszension und Deklination der Sonne, α_s und δ_s diejenigen der Achse des Schattenkegels der Erde, so hat man:

$$\alpha_s = \alpha_\odot + 12^h \quad \text{und} \quad \delta_s = -\delta_\odot;$$

man kann also auch sagen: notwendig für das Zustandekommen einer Mondfinsternis ist, daß an dem betreffenden Tage die Rektaszensionen des Schattenmittelpunktes der Erde und des Mondes einander gleich werden (Opposition in Rektaszension).

Die eben genannte Bedingung genügt aber nicht. Damit eine Mondfinsternis eintritt, ist noch die weitere erforderlich, daß zur

Zeit der Opposition der Mond sich sehr nahe dem Knoten seiner Bahn befindet, mit anderen Worten, daß er sich gerade sehr nahe bei der Durchschnittslinie von Mondbahn und Ekliptik aufhält, wenn die Sonne in Opposition mit ihm steht. Die Breite β des Mondes muß mindestens so klein sein, daß der Mond den Schattenkegel der Erde berührt (Fig. 3).

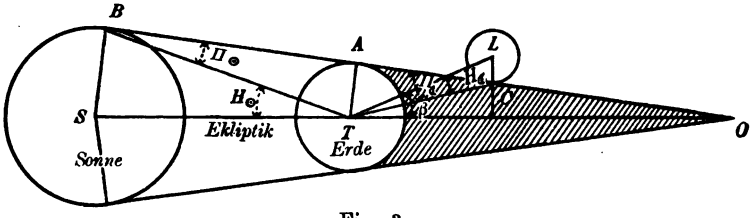


Fig. 3.

Die vorstehende Forderung läßt sich mathematisch formulieren.

Es sei $H_\odot$ der scheinbare Halbmesser der Sonne, $\pi_\odot$ die Sonnenparallaxe, $H_\leftmoon$ der scheinbare Halbmesser des Mondes, $\Pi_\leftmoon$ die Horizontalparallaxe des Mondes, $\Delta_\odot$ und $\Delta_\leftmoon$ seien die Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde, $R_\odot$ und $R_\leftmoon$ deren lineare Halbmesser und r der lineare Halbmesser der Erde, so hat man in Bogensekunden:

$$H_\odot = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{R_\odot}{\Delta_\odot}, \quad \pi_\odot = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{r}{\Delta_\odot},$$

$$H_\leftmoon = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{R_\leftmoon}{\Delta_\leftmoon}, \quad \Pi_\leftmoon = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{r}{\Delta_\leftmoon}.$$

Man findet dann aus der Figur 3, welche den Mond im Augenblick der Berührung mit dem Schattenkegel der Erde darstellt, die folgenden Winkelrelationen zwischen der Berührungsbreite β und den vorstehenden Größen:

$$LTO - LTC = CTO,$$

aber:

$$CTO = ACT - COT$$

und:

$$COT = BTS - IBA,$$

also hat man auch:

$$LTO - LTC = ACT - BTS + TBA,$$

d. h.

$$\beta - H_{\mathbb{C}} = \Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot},$$

oder:

$$\beta = H_{\mathbb{C}} + \Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot}$$

als Bedingung für die Breite β des Mondes im Moment seiner Berührung mit dem Schattenkegel der Erde.

Hierin als Maximalwerte eingesetzt nach Newcomb:

$$H_{\mathbb{C}} = 16'44'', \qquad H_{\odot} = 16'16'',$$
$$\Pi_{\mathbb{C}} = 61'29'', \qquad \pi_{\odot} = \quad 9''$$

und als Minimalwerte:

$$H_{\mathbb{C}} = 14'41'', \qquad H_{\odot} = 15'44'',$$
$$\Pi_{\mathbb{C}} = 53'55'', \qquad \pi_{\odot} = 8.6''$$

erhält man:

Maxim. von $\beta = 62'6''$ und Minim. von $\beta = 53'1''$.

Wenn also $\beta > 62'$ ist, so ist eine Mondfinsternis unmöglich; liegt β zwischen $62'$ und $53'$, so kann möglicherweise eine Mondfinsternis eintreten, ist aber $\beta < 53'$, so ist die Mondfinsternis gewiß.

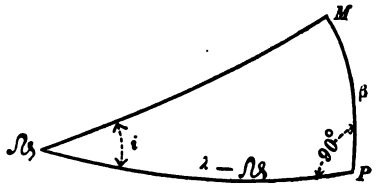


Fig. 4.

Auch die Mondlänge λ muß unterhalb einer bestimmten Grenze bleiben. Aus dem rechtwinklig sphärischen Dreieck (Fig. 4) M (Mond), Ω (Mondknoten), P (Projektion von M auf die Ekliptik) folgt:

$$\sin(\lambda - \Omega) = \operatorname{cotg} i \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

wo Ω die Länge des Mondknotens, i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik ist. Werden für i und β ihre Grenzwerte eingesetzt, so ergibt sich $\lambda - \Omega < 12^0$ als notwendige Bedingung für das Zustandekommen einer Finsternis.

Als Beispiel für die Berechnung der Phasen einer Mondfinsternis wird in dem folgenden die Finsternis gewählt, welche am 8. Februar 1906 um $18^h 50{,}6^m$ mittl. Berliner Zeit (bürgerlich am 9. Februar morgens $6^h 50{,}6^m$) stattfand.

Zunächst ersieht man aus der Vergleichung der Rektaszensionen von Sonne und Mond, wie sie im Nautical Almanac von Stunde zu Stunde angegeben sind oder aus dem Berliner Jahrbuch interpoliert werden können, daß am 8. Februar 1906 um $20^h 43^m 34^s$ eine Opposition des Mondes und der Sonne in Rektaszension stattfindet (AR Mond $= 9^h 28^m 21{,}6^s$, AR Sonne $= 21^h 28^m 21{,}6^s$). Es fragt sich nun, ob neben der Opposition auch die zweite Bedingung erfüllt ist. Man findet für die Oppositionszeit $\lambda = 139^0 43'$, $\beta = -0^0 7'$. β ist dem absoluten Wert nach $< 53'$, die Mondfinsternis ist also gewiß.

3. Die Distanz zwischen Mondmittelpunkt und Mittelpunkt des Schattenkegels.

Wie man aus Figur 3 sofort ersieht, ist CTO oder:

$$\Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot}$$

der geometrische Ausdruck für den Radius des Schattenkreises in Mondentfernung, ausgedrückt in Winkelmaß.

Da nun die Distanz d zwischen Mondmittelpunkt und Mittelpunkt des Schattenkegels = Radius des Schattenkreises $\pm H_{\mathbb{C}}$ ist, je nachdem der Mond den Kernschatten der Erde von außen oder innen berührt, so gelten folgende Beziehungen:

Zu Anfang und Ende der Finsternis überhaupt, also für den äußeren Kontakt mit dem Kernschatten ist:

$$d = \Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot} + H_{\mathbb{C}}.$$

Zu Anfang und zu Ende der Totalität der Finsternis überhaupt, also für den inneren Kontakt mit dem Kernschatten ist:

$$d = \Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot} - H_{\mathbb{C}}.$$

In Wahrheit wird infolge von Refraktionswirkungen der Radius des Schattenkegels größer als sein geometrischer Wert. Langjährige Erfahrungen haben ergeben, daß man dieser Vergrößerung dadurch Rechnung tragen kann, daß man den Radius gleich:

$$\tfrac{51}{50}[\Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot}]$$

setzt. Demnach ist für Anfang und Ende der Finsternis:

$$d = \tfrac{51}{50}[\Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot}] + H_{\mathbb{C}},$$

und für Anfang und Ende der Totalität:

$$d = \tfrac{51}{50}[\Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot}] - H_{\mathbb{C}}.$$

Die Größe d ist als eine bekannte Größe anzusehen, sie bildet ein wesentliches Moment für die Berechnung einer Finsternis. Das Problem läßt sich jetzt so formulieren: Zu welchen Zeitpunkten erreichen die Mittelpunkte des Mondes und des Schattenkegels gerade die durch die rechtsstehenden Größen bestimmbaren Distanzen d. Allerdings läßt sich d zunächst nicht in voller Strenge bestimmen, da $\Pi_{\mathbb{C}}$ und $H_{\mathbb{C}}$ und im geringeren Maße $H_{\odot}$ und $\pi_{\odot}$ Funktionen der Zeit sind, die strenge für den Zeitpunkt des Eintritts und Endes der Finsternis — also für Zeiten, die erst berechnet werden sollen — aus den Ephemeriden der astronomischen Jahrbücher entnommen werden müssen. Die zeitlichen Veränderungen von $\Pi_{\mathbb{C}}$ und $H_{\mathbb{C}}$ sind indessen so klein, daß man in erster Approximation hierfür ihre Werte zur Zeit der Opposition ansetzen kann.

Wir wollen jetzt die betreffenden d für die Mondfinsternis 1906 Februar 8 berechnen.

In der Mondephemeride des Berl. Jahrbuches 1906 (Seite 42 bis 81) ist unter der Rubrik log sin. A. H. Par. der Sinus der Äquatorial-Horizontalparallaxe des Mondes für alle Tage des Jahres von 12 zu 12 Stunden, und zwar für Mittag und Mitternacht der betreffenden Tage gegeben. Aus derselben erhält man durch Interpolation für die Oppositionszeit 1906 Febr. 8 $20^h 43^m$:

$$\log \sin \Pi_{\mathbb{C}} = 8{,}22724, \text{ d. i. } \Pi_{\mathbb{C}} = 58'0''.8.$$

Ferner gibt das Jahrbuch (Rubrik: Halbm., Seite 46, und Sonnenephemeride, Seite 4):

$$H_{\mathbb{C}} = 15'48''.5, \quad H_{\odot} = 16'12''.5, \quad \pi_{\odot} = 8''.9.$$

Damit erhält man:

Radius des Schattenkreises $= \Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot} = 2517''.2,$

Weg. Refrakt. verbesserter Radius $= \tfrac{51}{50}[\Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot}] = 2567''.5.$

Distanz für Anfang und Ende der Finsternis:

$$d = 3516''.0,$$

Distanz für Anfang und Ende der Totalität:

$$d = 1619''.0.$$

4. Die verschiedenen Umlaufszeiten des Mondes und der chaldäische Saroszyklus. Prädiktion der Mond- und Sonnenfinsternisse.

Bevor wir zur Berechnung der Elemente einer Mondfinsternis übergehen, wollen wir zunächst die Periodizität der Finsternisse behandeln. Wir werden so den chaldäischen Saroszyklus kennen lernen, auf dem im Altertum die Prädiktion der Mond- und Sonnenfinsternisse beruhte. Dies verlangt, daß wir uns zunächst mit den verschiedenen Umlaufszeiten des Mondes um die Erde beschäftigen.

Die Bewegungsverhältnisse der Sonne bieten verschiedene Umlaufszeiten dar, nämlich:

1. Den tropischen Umlauf, welcher die Sonne zu dem beweglichen Äquinoktium oder zu derselben Länge zurückführt. Die Zeitdauer dieses Umlaufs ist das tropische Jahr; die mittlere tägliche tropische Bewegung der Sonne beträgt $n = 59'8''$.

2. Den siderischen Umlauf, welcher die Sonne zu dem als fest gedachten Äquinoktium oder zu demselben Fixstern zurückführt. Die Zeitdauer dieses Umlaufs ist das siderische Jahr; die mittlere tägliche siderische Bewegung der Sonne ist etwas kleiner als die tropische.

3. Den anomalistischen Umlauf, welcher die Sonne zu demselben Punkt ihrer Bahn, also zu derselben mittleren Anomalie zurückführt.

In ähnlicher Weise gibt es beim Monde mehrere Arten verschiedener Umläufe, nämlich:

1. den tropischen Mondumlauf, welcher den Mond zu derselben, auf das bewegliche Äquinoktium bezogenen mittleren Länge in seiner Bahn zurückführt; seine Dauer ist

$$\text{der Tropische Monat} = 27^d\,7^h\,43^m\,4^s.7 = 27^d.3215824.$$

Die mittlere tägliche tropische Bewegung des Mondes ist daher:

$$m = \frac{360^0}{27^d.3215824} = 47435'' = 13^0\,10'\,35''.$$

2. den siderischen Mondumlauf, welcher den Mond zu dem als fest gedachten Äquinoktium oder zu demselben Fixstern zurückführt.

Ist p die tägliche Bewegung des Widderpunktes durch Präzession, so ist $m - p$ die mittlere tägliche siderische Bewegung des Mondes, und es besteht die Proportion:

$$\frac{\text{Siderischer Monat}}{\text{Tropischer Monat}} = \frac{m}{m-p} = \frac{1}{1-\frac{p}{m}} = 1 + \frac{p}{m} \cdots,$$

weil p gegen m sehr klein ist. Folglich hat man:

$$\text{Siderischer Monat} = \text{Tropischer Monat} \times \left(1 + \frac{p}{m}\right).$$

Die Verschiebung des Widderpunktes pro mittl. Sonnentag ist

$$p = \frac{50''.2235}{365{,}25} = 0''.1375045,$$

also:

$$1 + \frac{p}{m} = 1 + \frac{0''.1375045}{47435''} = 1{,}00000290,$$

und daher:

$$\text{Siderischer Monat} = \text{Trop. Monat} \times 1{,}00000290$$
$$= 27^{d}.7^{h}43^{m}11.5^{s}.$$

Der siderische Monat ist nur 6^{s} länger als der tropische.

3. den synodischen Mondumlauf. Man versteht darunter die Zeitdauer zwischen zwei Konjunktionen oder Oppositionen des Mondes mit der Sonne, also die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Neumonden oder Vollmonden.

Da sich Mond und Sonne in demselben Sinne und zwar von Westen nach Osten bewegen, so wird der Mond pro Tag der Sonne um den Bogen:

$$m - n = 13^{0}10'35'' - 0^{0}59'8'' = 43887''$$

vorauseilen. Wächst durch dieses Vorauseilen der Bogen zwischen Mond und Sonne bis zu 360^{0}, so hat der Mond die Sonne erreicht, und es tritt wieder Konjunktion oder Neumond ein. Die dazu erforderliche Zeitdauer ist der

$$\text{Synodische Monat} = \frac{360^0}{m-n} = \frac{1296000''}{43887''}$$
$$= 29^d.5305885$$
$$= 29^d\,12^h\,44^m\,2.8^s.$$

Er ist also um 2 Tage 5 Stunden länger als der siderische Monat und zugleich derjenige, welcher sich dem bürgerlichen, konventionellen Monat am engsten anschließt.

4. den drakonitischen Mondumlauf. Er umfaßt die Zeitdauer, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch seinen aufsteigenden Knoten verstreicht.

Die Knotenlinie des Mondes ist beweglich von Osten nach Westen und zwar derart, daß der Knoten einen ganzen Umlauf von 360^0 auf der Ekliptik in 18,6 Jahren oder genauer in $6793^d.39$ macht. Die mittlere tägliche Bewegung des Mondknotens ist also:

$$k = \frac{360^0}{6793^d.39} = \frac{1296000''}{6793^d.39} = 3'10''.77.$$

Addiert man hierzu die mittlere tägliche Bewegung des Mondes, so erhält man den Bogen, um welchen Mond und Knoten täglich auseinander gehen. Sie treffen sich wieder, wenn der Bogen auf 360^0 angewachsen ist, d. h.

$$\text{Drakonitischer Monat} = \frac{360^0}{m+k} = \frac{1296000''}{47625.80''}$$
$$= 27^d.21222$$
$$= 27^d\,5^h\,5^m\,36^s.$$

Wir kommen jetzt zur Ableitung der Finsternisperiode oder des Saroszyklus der Alten.

Damit die Sonnen- und Mondfinsternisse sich in demselben Zyklus wiederholen, muß nach Ablauf desselben der Mond in bezug auf die Sonne und in bezug auf seinen aufsteigenden Knoten in dieselbe relative Stellung gelangen. Die Finsternisperiode muß also von der synodischen und von der drakonitischen Umlaufszeit des Mondes abhängig sein.

Wenn m und n zwei ganze Zahlen sind, so muß für eine Wiederholung dieser Stellung notwendigerweise sein:

$$m \cdot 29^d.53060 = n \cdot 27^d.21222$$

oder:

$$\frac{n}{m} = \frac{29.53060}{27.21222}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cdots}}}}}}}$$

Die Näherungswerte dieses Kettenbruches sind:

$$\frac{n}{m} = \frac{12}{11}, \quad \frac{13}{12}, \quad \frac{38}{37}, \quad \frac{51}{47}, \quad \frac{242}{223}, \quad \cdots$$

Mit dem letzten Näherungswert erhält man:

242 drakonitische Umläufe = 223 synodische Umläufe

$= 6585^{d}.3 = 18$ Jahre 11 Tage.

Also nach Ablauf von 18 julianischen Jahren 11 Tagen (genauer $18^{j}11^{d}7^{h}42^{m}$, wenn Febr. 29 in der Periode 4 mal erscheint, $18^{j}10^{d}7^{h}42^{m}$, wenn er 5 mal erscheint) kehren Sonne, Mond und Mondknoten zu derselben relativen Stellung zurück, d. h. wiederholen sich die Finsternisse. Diese Periode ist bekanntlich die chaldäische oder der Saroszyklus. Innerhalb derselben treten 41 Sonnenfinsternisse und 29 Mondfinsternisse auf, und diese vollziehen sich, abgesehen von den kleinen Störungen, in derselben Ordnung und denselben Zeitintervallen.

Wir hatten die Mondfinsternis von Februar 8 1906 als Beispiel für unsere Berechnungen gewählt. Die vorausgehende, im Saroszyklus korrespondierende fand am 28. Januar 1888 statt, denn man hat:

1906 Februar 8 = 1888 Januar 28 + 18 Jahre 11 Tage.

Auf Grund des Saroszyklus lassen sich folgende Sonnenfinsternisse für die nächsten Jahre voraussagen:

1910 . . . . . Mai 9
1910 November 2
1911 . . . . . April 28 total in Australien, Polynesien,

1911 Oktober 22 . . . . ringförmig in der Sundasee,
1912 . . . . . April 17 ringförmig in Mitteleuropa,
1912 Oktober 10 . . . . total in Südamerika,
1913 . . . . . April 6,
1913 August 31
1913 September 30
1914 . . . . . Februar 25,
1914 August 21 . . . . . total in Skandinavien, Russ.-Asien usw.

5. Bestimmung der Oppositionszeit von Sonne und Mond für die Finsternis 1906 Febr. 8.

Nachdem auf Grund des Saroszyklus der Tag der Finsternis bestimmt ist, besteht die Aufgabe zunächst in der Ermittelung der Oppositionszeit, also des Zeitmomentes, für welchen am 8. Februar $\alpha_{\mathfrak{C}} = \alpha_s = \alpha_{\odot} + 12^h$ ist.

Eine oberflächliche Vergleichung der Mond- und Sonnenephemeride des Berliner Jahrbuchs ergibt, daß die Opposition zwischen 20^h und 21^h stattfindet. Um diesen Zeitpunkt genauer zu bestimmen, besonders aber um die für die Berechnung der Finsternis nötigen Daten zu gewinnen, sind die äquatorialen Koordinaten des Mondes und Schattenkegels aus dem Jahrbuch von Stunde zu Stunde zu entnehmen, und zwar etwa drei Stunden vor und drei Stunden nach der Opposition. Dieselben und ihre stündlichen Änderungen $\mu_{\mathfrak{C}}$, μ_s in Rektaszension bzw. $\nu_{\mathfrak{C}}$, ν_s in Deklination sind:[1])

1) Die Koordinaten sind aus dem Berliner Jahrbuch interpoliert worden, welches $\alpha_{\mathfrak{C}}$ und $\delta_{\mathfrak{C}}$ nur in Intervallen von 12 Stunden, $\alpha_{\odot}$ und $\delta_{\odot}$ nur in Intervallen von 24 Stunden gibt. Die Arbeit der Interpolation kann erspart werden, wenn der Nautical Almanac zur Hand ist, in welchem $\alpha_{\mathfrak{C}}$ und $\delta_{\mathfrak{C}}$ von Stunde zu Stunde, sowie ihre Änderungen in 10^m angegeben sind. Da der Längenunterschied Greenw.-Berl. 53.582^m beträgt, hat man an das aus dem Almanac entnommene $\alpha_{\mathfrak{C}}$ nur die Reduktion $-5.3582 \cdot \mu_{\mathfrak{C}}$ anzubringen, um $\alpha_{\mathfrak{C}}$ für den Berliner Meridian zu erhalten. $\mu_{\mathfrak{C}}$ bedeutet hier die Änderung der Rektaszension pro 10^m, die im Nautical Almanac angegeben ist. In derselben Weise erhält man $\delta_{\mathfrak{C}}$ durch Anbringung von $-5.3582 \cdot \nu_{\mathfrak{C}}$ an die Deklination für Greenwich.

1906 Mittl. Z. Berlin		$\alpha_{\mathbb{C}}$	$\mu_{\mathbb{C}}$	α_s	μ_s
8. Febr.	17^h	$9^h 19^m 47.66^s$		$9^h 27^m 44.56^s$	
			$+ 2^m 17.97^s$		$+ 9.94^s$
	18	22 5.63		27 54.50	
			+ 2 17.96		+ 9.93
	19	24 23.59		28 4.43	
			+ 2 17.91		+ 9.93
	20	26 41.50		28 14.36	
			+ 2 17.86		+ 9.95
	21	28 59.36		28 24.31	
			+ 2 17.81		+ 9.95
	22	31 17.17		28 34.26	
			+ 2 17.76		+ 9.95
	23	33 34.93		28 44.21	

		$\delta_{\mathbb{C}}$	$\nu_{\mathbb{C}}$	δ_s	ν_s
8. Febr.	17	$+ 15^0 16' 21.5''$		$+ 14^0 58' 20.9''$	
			$- 7' 27.0''$		$- 47.6''$
	18	8 54.5		57 33.3	
			− 7 29.7		− 47.6
	19	1 24.8		56 45.7	
			− 7 35.2		− 47.6
	20	14 53 49.6		55 58.1	
			− 7 40.8		− 47.7
	21	46 8.8		55 10.4	
			− 7 46.4		− 47.6
	22	38 22.4		54 22.8	
			− 7 52.1		− 47.6
	23	30 30.3		53 35.2	

Um die Oppositionszeit zu berechnen, bilden wir:

		$\alpha_s - \alpha_{\mathbb{C}}$	Δ_1	Δ_2
8. Febr.	19^h	$+ 3^m 40.84^s$		
			$- 2^m 7.98^s$	
	20	+ 1 32.86		$+ 0.06^s$
			− 2 7.91	
	21	− 0 35.05		+ 0.05
			− 2 7.86	
	22	− 2 42.91		

Ist $20^h + t$ die Oppositionszeit, so folgt aus der Newtonschen Formel:

$$0 = \alpha_s - \alpha_\mathbb{C} + t \cdot \Delta_1 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} \Delta_2,$$

also:

$$t = \frac{-(\alpha_s - \alpha_\mathbb{C})}{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{t}{2} \cdot \Delta_2},$$

oder wenn rechts für t der Näherungswert $-\frac{(\alpha_s - \alpha_\mathbb{C})}{\Delta_1}$ gesetzt wird:

$$t = \frac{-(\alpha_s - \alpha_\mathbb{C})}{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{2}\Delta_2 \cdot \frac{(\alpha_s - \alpha_\mathbb{C})}{\Delta_1}}.$$

Hiermit wird:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -\ 2^m 7.91^s \\
-\frac{1}{2}\Delta_2 = -\frac{1}{2}\,0.06^s &= -\ \ 0.03 \\
-\frac{1}{2}\Delta_2 \frac{(\alpha_s - \alpha_\mathbb{C})}{\Delta_1} &= +\ \ 0.02 \\
\text{Nenner} &= -\ 2\ \ 7.90
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log[-(\alpha_s - \alpha_\mathbb{C})] &= 1.96783\ n \\
\log \text{Nenner} &= 2.10687\ n \\
\log t &= 9.86096 \\
t &= 0.72603^h \\
&= 43^m 33.7^s
\end{aligned}$$

δ von Mond und Schattenkegel in AR... Febr. 8 $20^h 43^m 33.7^s$.

6. Berechnung der Phasen einer Mondfinsternis.

Zu einer der Oppositionszeit sehr benachbarten Zeit T seien $\alpha_\mathbb{C}$, $\delta_\mathbb{C}$ die Koordinaten des Mondmittelpunktes, α_s, δ_s diejenigen des Schattenmittelpunktes, d die diesem Zeitmoment entsprechende

Distanz von Mond- und Schattenmittelpunkt. Aus dem in Fig. 5

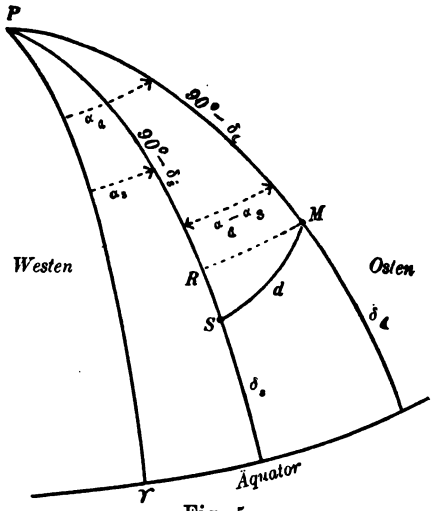


Fig. 5.

dargestellten Dreieck zwischen P (Pol), M (Mond) und S (Schattenmittelpunkt) folgt dann die Gleichung:

$$\cos d = \sin \delta_s \sin \delta_{\mathbb{C}} + \cos \delta_s \cos \delta_{\mathbb{C}} \cos (\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s).$$

Die Formel gestattet eine wesentliche Vereinfachung, da T der Oppositionszeit sehr nahe liegen soll, also $\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s$, $\delta_{\mathbb{C}} - \delta_s$ und d kleine Winkel sind.

Man hat:

$$\cos d = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} d, \qquad \cos (\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s}{2},$$

$$\cos (\delta_{\mathbb{C}} - d_s) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta - \delta_s}{2},$$

womit die vorstehende Formel übergeht in:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} d = \sin^2 \tfrac{1}{2} (\delta_{\mathbb{C}} - \delta_s) + \cos \delta_{\mathbb{C}} \cos \delta_s \sin^2 \tfrac{1}{2} (\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s),$$

die mit Rücksicht auf die Kleinheit der Winkelgrößen so geschrieben werden kann:

$$d^2 = [\delta_{\mathbb{C}} - \delta_s]^2 + \cos^2 \delta' [\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s]^2,$$

worin:

$$\delta' = \tfrac{1}{2} (\delta_{\mathbb{C}} + \delta_s)$$

ist. Dies ist ein geometrisch leicht interpretabler Ausdruck. Fällt man von M aus ein Lot MR auf den Deklinationskreis von S, so wird das Dreieck MRS als ein rechtwinklig ebenes betrachtet werden können, dessen Hypotenuse d ist, und dessen Katheten $\delta_{\mathbb{C}} - \delta_s$ und $\cos\delta'(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s)$ sind.

Sämtliche Bestimmungsstücke der vorstehenden Gleichung gehören zu einem Zeitpunkt T, der der Opposition sehr nahe liegt bzw. mit ihr zusammenfällt. Ändert sich T um die kleine Zeitgröße τ, so wird die Gleichung noch Gültigkeit haben, nur mit der Maßgabe, daß für die rechts stehenden Koordinaten die dem Zeitpunkt $T + \tau$ entsprechenden Koordinaten:

$$\alpha_{\mathbb{C}} + \mu_{\mathbb{C}}\tau \quad \text{und} \quad \alpha_s + \mu_s\tau$$
$$\delta_{\mathbb{C}} + \nu_{\mathbb{C}}\tau \quad \text{und} \quad \delta_s + \nu_s\tau$$

zu setzen sind, wo $\mu_{\mathbb{C}}$ und μ_s die stündlichen Bewegungen in Rektaszension, $\nu_{\mathbb{C}}$ und ν_s diejenigen in Deklination des Mondes und Schattenkegels sind, und τ in Bruchteilen der Stunde ausgedrückt ist.

Setzt man der Kürze wegen:

$$(1) \qquad \mu_{\mathbb{C}} - \mu_s = m \quad \text{und} \quad \nu_{\mathbb{C}} - \nu_s = n,$$

so stellen m und n die relativen stündlichen Bewegungen des Mondes gegen den Schattenmittelpunkt in Richtung der Sternkoordinaten dar, und die obige Gleichung wird jetzt:

$$d^2 = [\delta_{\mathbb{C}} - \delta_s + n\tau]^2 + \cos^2\delta'[\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s + m\tau]^2.$$

Es ist dies die Fundamentalgleichung für die Bestimmung der Phase einer Mondfinsternis. Identifizieren wir nämlich T mit der von uns bereits berechneten Oppositionszeit, setzen wir ferner (Nr. 3):

$$d = \tfrac{51}{50}[\Pi_{\mathbb{C}} - H_{\odot} + \pi_{\odot}] \pm H_{\mathbb{C}}$$

als Annäherungswert der Distanz zu Anfang und Ende der Finsternis bzw. der Totalität — Größen, die wir bereits für die Opposition berechnet haben, und die mit der Zeit wenig veränderlich sind — so ist τ die einzige Unbekannte in der quadratischen Fundamentalgleichung. Um ihre Auflösung nach τ zu erleichtern, setzen wir:

$$(2)\qquad \begin{cases} a \sin A = [\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s] \cos \delta' & b \sin B = m \cos \delta' \\ a \cos A = \delta_{\mathbb{C}} - \delta_s & b \cos B = n \end{cases}$$

Damit zerfällt sie in die beiden Gleichungen:

$$d \sin \alpha = a \sin A + b \sin B \cdot \tau$$
$$d \cos \alpha = a \cos A + b \cos B \cdot \tau,$$

aus denen sie durch Quadrieren und Addieren wieder hervorgeht.

Die Hilfsgrößen a, b, A, B sowie α haben eine einfache geometrische Bedeutung. a ist die Distanz zwischen Mond- und Schattenmittelpunkt zur Epoche T, A der Winkel, welchen diese Distanz mit dem durch den Schattenmittelpunkt gelegten Meridian bildet. b ist die relative stündliche Bewegung des Mondmittelpunktes gegen den Schattenmittelpunkt, und B bestimmt ihre Richtung gegen den durch den Schattenmittelpunkt gelegten Meridian; α endlich ist der Winkel, welchen die Distanz d bei Berührung der Mondscheibe und des Schattenkreises mit dem durch den Schattenmittelpunkt gelegten Meridian einschließt; für Ein- und Austritt der Mondscheibe ergeben sich zwei gesonderte Werte für α. Alle Winkelgrößen sind dabei vom Nordpunkt des durch den Schattenmittelpunkt gelegten Meridians über Osten, entsprechend den positiven Richtungen der Sternkoordinaten, zu zählen.

In der Fig. 6, welche das Diagramm der totalen Mondfinsternis 1906 Februar 8 darstellt, die in dem folgenden als Rechnungsbeispiel dient, sind sämtliche in Betracht kommenden Größen eingezeichnet worden. Die obigen Formeln für die Phasenbestimmung einer Mondfinsternis lassen sich unmittelbar aus dieser Figur ableiten.

Multipliziert man die erste der vorstehenden Gleichungen mit $\cos B$, die zweite mit $\sin B$, so erhält man durch Subtraktion:

$$d \sin (\alpha - B) = a \sin (A - B).$$

Multipliziert man dagegen die erste der Gleichungen mit $\sin B$, die zweite mit $\cos B$, so erhält man durch Addition:

$$d \cos (\alpha - B) = a \cos (A - B) + b \cdot \tau.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen:

$$(3)\qquad \sin (\alpha - B) = \frac{a \sin (A - B)}{d}$$

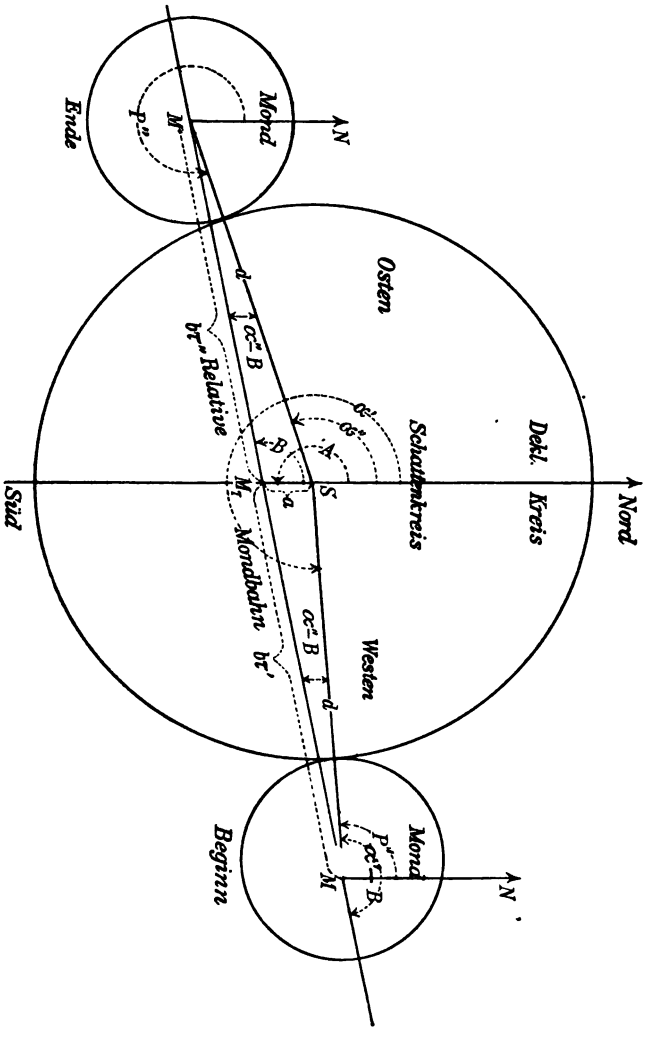


Fig. 6.

ergeben sich die beiden Positionswinkel α der Distanz, aus der zweiten die Zeiten:

$$\tau = \frac{d\cos(\alpha - B)}{b} - \frac{a\cos(A - B)}{b} \tag{4}$$

in Funktion bekannter Größen, der sogenannten Elemente der Finsternis. Bei der numerischen Rechnung sind a und b stets als positive Größen zu betrachten.

Da die Zeit des Eintrittes früher als die des Austrittes fallen muß, ist in (4) $\cos(\alpha - B)$ negativ für den Eintritt, positiv für den Austritt zu nehmen. Der Quadrant für $\alpha - B$ entscheidet sich dabei durch gleichzeitige Beachtung des Zeichens von $\sin(\alpha - B)$, wie dieses aus Formel (3) hervorgeht. Legt man der Rechnung den spitzen Winkel von $\alpha - B$ zugrunde, so hat man also:

$$(4^*) \qquad \begin{cases} \tau' = -\dfrac{a\cos(A-B)}{b} - \dfrac{d\cos(\alpha-B)}{b} \\ \tau'' = -\dfrac{a\cos(A-B)}{b} + \dfrac{d\cos(\alpha-B)}{b} \end{cases}$$

für Ein- und Austritt, und damit die

$$\text{Zeit des Beginns der Finsternis} = T + \tau'$$
$$\text{„ „ Endes „ „} = T + \tau'',$$

wenn für d der erste der oben (Nr. 3) berechneten Werte gesetzt wird, und entsprechend für die Grenzen der Totalität, wenn d den zweiten Wert erhält.

Die beiden Positionswinkel α' und α'' für Ein- und Austritt erhält man aus Gleichung (3), und zwar α' für den Eintritt, wenn man für $\cos(\alpha - B)$ das negative Zeichen, α'' für den Austritt, wenn man für $\cos(\alpha - B)$ das positive Zeichen nimmt. Man pflegt indessen bei Mondfinsternissen die Positionen nicht auf den Schattenmittelpunkt, sondern auf den Mondmittelpunkt zu beziehen, und zwar von der Nordrichtung des durch diesen Punkt gelegten Meridians über Osten nach Westen. Man sieht ohne weiteres aus der Figur 6, daß der

$$\text{Positionswinkel des Eintritts } P' = 180^0 + \alpha'$$
$$\text{„ „ Austritts } P'' = 180^0 + \alpha''$$

ist.

Aus den Gleichungen (4*) erhält man die

$$\text{Zeit der Mitte der Finsternis} = T - \frac{a}{b}\cos(A - B).$$

Um diese Zeit der größten Verfinsterung erreichen die beiden

Zentren des Mond- und Schattenkreises die Minimaldistanz $d_m = a \sin (A - B)$. Der Unterschied der Distanz bei äußerer Berührung und dieser Minimaldistanz, also $d - d_m$ repräsentiert die Größe der Finsternis. Man mißt dieselbe in Einheiten des Monddurchmessers, setzt also:

$$\text{Größe der Finsternis } \Delta = \frac{d - d_m}{2 H_{\mathbb{C}}}.$$

Ist $\Delta > 1$, so ist die Finsternis total, ist dagegen $\Delta < 1$, so ist die Finsternis partiell. Aus dem Wert dieses Bruches läßt sich unmittelbar ersehen, der wievielte Teil des Monddurchmessers vom Erdschatten verdunkelt wird.

7. Berechnung der Phasen der totalen Mondfinsternis 1906 Febr. 8.

Als Ausgangsepoche der Rechnung wählen wir die Oppositionszeit (Nr. 5):

$$T = 20^h 43^m 33.7^s$$

und interpolieren für diesen Zeitpunkt die Elemente der Finsternis aus der in Nr. 5 gegebenen Tabelle der Koordinaten des Mondes und des Schattenkegels:

$\alpha_{\mathbb{C}}$	$= 9^h 28^m 21.6^s$	$\delta_{\mathbb{C}}$	$= + 14^0 48' 15.6$
α_s	$= 9\ 28\ 21.6$	δ_s	$= + 14\ 55\ 23.6$
$\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s$	$= 0$	$\delta_{\mathbb{C}} - \delta_s$	$= -\ 7\ 8.0$
			$= - 428.0''$
$\mu_{\mathbb{C}}$	$= 2^m 17.8^s$	$\nu_{\mathbb{C}}$	$= - 7' 42.0''$
μ_s	$= 9.9$	ν_s	$= - 47.7$
m	$= 2\ 7.9$	n	$= - 6\ 54.3$
	$= + 1918.5''$		$= - 414.3''$

$d = 3516.0''$ für Anfang und Ende der Finsternis
$d = 1619.0''$ „ „ „ „ „ Totalität. } (Nr. 3)

$$\delta' = \tfrac{1}{2} (\delta_{\mathbb{C}} + \delta_s) = + 14^0 51' 49.6''.$$

Da $\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s = 0$ und a positiv sein muß, wird $A = 180^0$, $\cos A = - 1$, also $a = \delta_s - \delta_{\mathbb{C}} = + 428.0''$.

$\log m$	$= 3.28300$	$B = 102^0 35' 35''$
$\log \cos \delta'$	$= 9.98523$	
$\log b \sin B$	$= 3.26823$	$\log b \sin B = 3.26823$
$\log b \cos B$	$= 2.61731_n$	$\log \sin B = 9.98942$
$\log \operatorname{tg} B$	$= 0.65092_n$	$\log b = 3.27881.$

Für Anfang und Ende überhaupt:		Für Anfang und Ende der Totalität:
$\log a$	$= 2.63144$	
$\log \sin (A-B)$	$= 9.98942$	
$\log a \sin (A-B)$	$= 2.62086$	$= 2.62086$
$\log d$	$= 3.54605$	$= 3.20925$
$\log \sin (\alpha - B)$	$= 9.07481$	$= 9.41161$
$\alpha' - B$	$= 173^0 10' 38''$	$= 165^0\ 2' 56''$
$\alpha'' - B$	$= 6\ 49\ 22$	$= 14\ 57\ 4$
α'	$= 275\ 46\ 13$	$= 267\ 38\ 31$
α''	$= 109\ 24\ 57$	$= 117\ 32\ 39$
$\log d$	$= 3.54605$	$= 3.20925$
$\log \cos (\alpha - B)$	$= 9.99691$	$= 9.98504$
$\log d \cos (\alpha - B)$	$= 3.54296$	$= 3.19429$
$\log b$	$= 3.27881$	$= 3.27881$
$\log \frac{d}{b} \cos (\alpha - B)$	$= 0.26415$	$= 9.91548$
$\log a$	$= 2.63144$	
$\log \cos (A-B)$	$= 9.33851$	
$\log a \cos (A-B)$	$= 1.96995$	
$\lg b$	$= 3.27881$	
$\log \frac{a}{b} \cos (A-B)$	$= 8.69114$	
$-\frac{d}{b} \cos (\alpha - B)$	$= -1^h.8372$	$= -0^h.8231$
$-\frac{a}{b} \cos (A-B)$	$= -0.0491$	$= -0.0491$
τ'	$= -1.8863$	$= -0.8722$
	$= -1^h.53^m 11^s$	$= -0^h 52^m 20^s$

	Für Anfang und Ende überhaupt:	Für Anfang und Ende der Totalität:
$+\frac{d}{b}\cos(\alpha - B)$	$= + 1^h 8372$	$= + 0^h 8231$
$-\frac{a}{b}\cos(A - B)$	$= - 0.0491$	$= - 0.0491$
	$\tau'' = + 1.7881$	$= + 0.7740$
	$= + 1^h 47^m 17^s$	$= + 0^h 46^m 26^s$

Anfang der Finsternis	Anfang der Totalität
$T + \tau' = 18^h 50^m.4$	$T + \tau' = 19^h 51^m.2$
Ende der Finsternis	**Ende der Totalität**
$T + \tau'' = 22^h 30^m.8$	$T + \tau'' = 21^h 30^m.0.$

Positionswinkel { des Eintritts $P' = 180^0 + \alpha' = 96^0$
des Austritts $P'' = 180^0 + \alpha'' = 289^0$

gezählt vom Nordpunkt des Mondes über Osten.

Mit den gefundenen Zeiten sind nun alle veränderlichen Größen abermals zu interpolieren, und die Rechnung ist dann von neuem, gesondert für Ein- und Austritt, durchzuführen. In der Regel begnügt man sich mit der ersten Approximation, sofern nicht die Mondfinsternis für die Zwecke der Längenbestimmung Verwendung finden soll. Das Berliner Jahrbuch 1906 macht S. 338 folgende Angaben:

	mittl. Berl. Zeit
Anfang der Finsternis überhaupt Febr. 8 .	$18^h 50^m.6$
Anfang der totalen Verfinsterung.	$19^h 51^m.4$
Ende der totalen Verfinsterung	$21^h 29^m.8$
Ende der Finsternis überhaupt.	$22^h 30^m.7$,

die bis auf wenige Zehntel der Minute mit unserer ersten Näherung übereinstimmen.

Für einen Meridian von der Länge l östlich von Berlin wird die Zeit des Beginns und Endes $T + \tau' + l$ bzw. $T + \tau'' + l$ sein. Die Reduktion auf mitteleuropäische Zeit erfolgt durch Addition von $6^m 25.2^s$ zur Berliner Ortszeit.

8. Lage des Mondzenits bei Anfang und Ende der Finsternis.

Um die Sichtbarkeitsgrenzen einer Mondfinsternis zu bestimmen, ist es notwendig, denjenigen Erdort nach Breite und Länge gegen einen festen Meridian zu berechnen, für welchen der Mond während der einzelnen Phasen des Phänomens im Zenit steht. Es werden dann alle diejenigen Orte der Erde in dem Sichtbarkeitsbereich liegen, für welche der Mond über dem Horizont ist, und das sind alle Orte, welche in einer Distanz $< 90^0$ um den betreffenden Erdort liegen. Sucht man daher auf der Erdkarte oder dem Globus den Punkt auf, für welchen der Mond während der Finsternis im Zenit steht, so braucht man nur mit einem Radius von 90^0 um diesen Punkt als Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben; die Fläche dieses Kreises umfaßt dann den Sichtbarkeitsbereich der Finsternis.

Die Lage dieses Erdortes wird in folgender Weise bestimmt: Die mittl. Zeit des Beginns der Finsternis für den Meridian von Berlin ist der Winkel, unter dem sich die mittl. Sonne beim Beginn der Finsternis gegen den Meridian von Berlin befindet. Wird hiervon die Zeitgleichung algebraisch subtrahiert[1]), so erhält man die wahre Zeit, d. h. den westl. Winkel, den die Sonne mit dem Meridian von Berlin bildet. Hierzu sind 12^h zu addieren, um die Länge des Schattenmittelpunktes gegen Berlin zu erhalten. Um endlich den Winkel zu erhalten, den der Meridian des Mondmittelpunktes mit demjenigen von Berlin einschließt, ist zu dem gefundenen Winkel noch $-(\alpha_{\mathfrak{C}} - \alpha_s)$ für den betreffenden Moment hinzuzufügen. Das negative Zeichen ist dadurch begründet, daß der Mond beim Eintritt in den Schattenkegel in Rektaszension diesem folgt; beim Austritt, wo er vorangeht, ist dagegen das positive Zeichen zu nehmen.

Die Rechnung stellt sich also so:

Zeit des Beginns der Finsternis = Länge d. mittl. Sonne, westl. von Berlin	$18^h 50^m 36^s$
Zeitgleichung 1906 Febr. 8.	$+ 14^m 20^s$
Länge der wahren Sonne, westl. von Berlin . . .	$18^h 36^m 16^s$

1) Wahre Zeit = Mittl. Zeit — Zeitgleichung (Berl. Jahrbuch).

Länge der wahren Sonne, westl. von Berlin . . .	$18^h 36^m 16^s$
Differenz: Schattenmittelpunkt	12^h
Länge des Schattenmittelpunkts, westl. von Berlin	$6^h 36^m 16^s$
$-(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_s)$ bei Beginn der Finsternis	$4^m 0^s$
Länge des Mondmittelpunktes, westl. von Berlin .	$6^h 40^m 16^s$
„ „ „ in Gradmaß . . .	$100^0 4'$
„ „ „ östl. v. Berlin . . .	$259^0 56'$
Länge Berlin, östlich gegen Greenwich	$13^0 24'$
Länge des Mondmittelpunktes bei Beginn der Finsternis, östlich v. Greenwich	$273^0 20'$

Eine ähnliche Rechnung ergibt die Länge des Mondmittelpunktes am Ende der Finsternis zu $220^0 17'$ östlich von Greenwich. Die wegen Abweichung von der Kugelgestalt der Erde verbesserte Deklination des Mondes $\delta_{\mathbb{C}}$ ist zugleich die Breite des betreffenden Erdortes während der Phase der Finsternis. Demnach sind die Koordinaten der Orte, an welchen der Mond im Zenit steht:

	Länge, östl. v. Greenw.	Nördl. Breite
Bei Beginn	$273^0 20'$	$15^0 8'$
Bei Ende	$220^0 17'$	$14^0 40'$.

Die Finsternis wird hiernach in der westlichen Hälfte Europas, im nordwestlichen Teil Afrikas, im Atlantischen Ozean, in Amerika, im Stillen Ozean, im Nordosten Asiens und an der Ostküste Australiens sichtbar sein.

II. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe.

9. Bedingungen für das Zustandekommen eines Vorüberganges. Periodizität der Vorübergänge.

Fragen wir uns zunächst, wie Vorübergänge der beiden inneren Planeten Merkur und Venus vor der Sonnenscheibe zustande kommen. Es hängt dies von zwei Bedingungen ab, die nur selten gleichzeitig erfüllt sind, nämlich 1. muß der Planet sich nahe in

Konjunktion mit der Sonne befinden, für Konjunktion in AR müssen also die Rektaszensionen beider Gestirne einander gleich sein, 2. muß der Planet sich nahe bei dem auf- oder absteigenden Knoten seiner Bahn befinden.

Um diese Verhältnisse zu veranschaulichen, dient die Fig. 7, in welcher die Erd- und Venusbahn als konzentrische Kreise gezeichnet sind, in deren Mittelpunkt die Sonne steht. Die Venusbahn schneidet die Erdbahn in der Knotenlinie $\Omega\,\mathfrak{P}$, wobei die vom Frühlingsnachtgleichenpunkt Υ in der Richtung der Erdbewegung gezählte ekliptikale Länge des aufsteigenden Venusknotens $75^0 52.3'$, die Neigung der Venusbahn gegen die Erdbahn $3^0 23.6'$ ist.[1]) Da bei einem Vorübergang vor der Sonne die heliozentrische Länge der Erde dieselbe sein muß wie diejenige des Venusknotens, so wird die geozentrische Länge der Sonne den Wert haben müssen:

$$75^0 52.3' + 180^0 = 255^0 52.3'.$$

Diese Länge wird aber von der Sonne zu Anfang Dezember erreicht. Es können folglich Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe in der Nähe ihres aufsteigenden Knotens nur in den ersten Tagen des Dezembers stattfinden.

Die Länge des absteigenden Knotens der Venus ($\mathfrak{P}$) ist $255^0 52{,}3'$, die geozentrische Länge der Sonne $255^0 52.3' + 180^0 = 75^0 52.3'$, und diese wird von der Sonne zu Anfang Juni erreicht. Vorübergänge der Venus in der Nähe ihres absteigenden Knotens können daher nur in den ersten Tagen des Juni stattfinden.

Aus der Figur 7 ist leicht ersichtlich, daß Vorübergänge des Planeten nur bei Konjunktionen, welche in der Nähe der Knotenlinie stattfinden, eintreten können. Hierbei wird zu unterscheiden sein, ob die Konjunktion vor oder nach der Passage des betreffenden Knotens erfolgt. Im Orte 1 befindet sich die Venus vor dem aufsteigenden Knoten, also unterhalb der Ekliptik; sie wird sich daher von einem Orte der nördlichen Erdhälfte als dunkler Punkt unterhalb der Sonnenmitte projizieren. Ist Venus über den aufsteigenden Knoten hinaus nach dem Orte 2 gelangt, so steht sie

1) Die Werte gelten für 1910. (Mittl. Äquin. 1910.0). Die Knotenlänge ändert sich ein wenig, die Neigung bleibt dagegen für einen langen Zeitraum nahezu konstant.

oberhalb der Ekliptik, und sie wird daher von einem Erdorte der nördlichen Erdhälfte aus in der oberen Hälfte der Sonnenscheibe beim Vorübergang erscheinen. Ähnliche Verhältnisse treten zur Zeit der Konjunktion in der Nähe des absteigenden Knotens ein: in 3 sieht man von der Erde aus Venus oberhalb, in 4 unter-

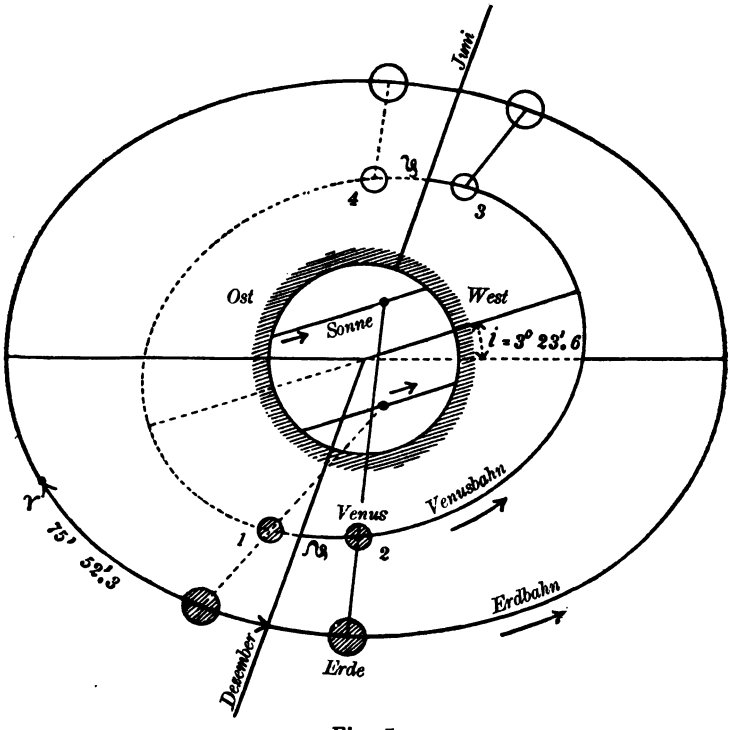


Fig. 7.

halb der Sonnenmitte. Ein zentraler Vorübergang kann nur dann stattfinden, wenn die Konjunktion genau in dem Augenblick erfolgt, in dem Venus die Knotenlinie passiert.

Die Vorübergänge der inneren Planeten vor der Sonnenscheibe sind an bestimmte Perioden gebunden, und wir wollen uns jetzt ihrer Ermittlung zuwenden. Dazu müssen wir die siderische und synodische Umlaufszeit der Planeten in Betracht ziehen.

Der siderische Umlauf eines Planeten umfaßt den Zeitraum, der zwischen zwei gleichartigen Stellungen des Planeten gegen die Fixsterne verstreicht. Jahrhundertelange Beobachtungen haben ergeben:

Siderische Umlaufszeit der Venus . . . 224.7007^d,
„ „ des Merkur . . 87.97,
„ „ der Erde . . . 365.2563.

Dividiert man $360^0 = 1296000''$ durch diese Zahlen, so findet man die:

Mittl. tägliche siderische Bewegung der Venus . . 5767.670″
„ „ „ „ des Merkur . 14732.420
„ „ „ „ der Erde . . 3548.193.

Der synodische Umlauf eines Planeten umfaßt die Zwischenzeit zwischen zwei gleichartigen Stellungen des Planeten gegen die Sonne, also die Zeit zwischen zwei Konjunktionen oder Oppositionen. Ist μ_p die mittl. siderische Bewegung des inneren Planeten, μ_e diejenige der Erde, so ergibt sich, wie leicht ersichtlich, die synodische Umlaufszeit T_1 aus:

$$T_1 = \frac{360^0}{\mu_p - \mu_e},$$

also:

Synodische Umlaufszeit der Venus . . . 583.92^d
„ „ des Merkur . . . 115.88.

Hat ein Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe stattgefunden, und soll sich ein solcher wiederholen, so muß die Venus in bezug auf ihre Knoten (siderischer Umlauf[1]) und in bezug auf die Sonne (synodischer Umlauf) in dieselbe relative Stellung gelangen. Sind also m und n zwei ganze Zahlen, so muß für die Wiederholung dieser Stellung notwendigerweise sein:

$$m \cdot 583.92^d = n \cdot 224.70^d,$$

oder:

$$\frac{n}{m} = \frac{583.92}{224.70} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{29+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

1) Wegen der kleinen Veränderungen in der Lage der Knoten der Venusbahn deckt sich der siderische Umlauf der Venus nicht ganz mit ihrem tropischen; der Unterschied ist aber sehr gering.

Die Näherungswerte dieses Kettenbruches vom vierten an sind:

$$\frac{13}{5}, \quad \frac{382}{147}, \quad \frac{395}{152}.$$

Man hat also:

13	siderische	Umläufe	der Venus	2921.10^d
5	synodische	„	„ „	2919.60
8	siderische	„	„ Erde	2922.05.

Der Planet kehrt also zur Konjunktion zurück 2.5^d vor 8 Jahren und nach seinem Knoten 1^d vor 8 Jahren. Die tägliche Änderung der geozentrischen Breite der Venus beträgt in der Nähe der Knoten durchschnittlich 15′, also in 1.5 Tagen 22′. Da nun der Durchmesser der Sonnenscheibe 32′ beträgt, so ist eine Wiederholung des Vorüberganges nach 8 Jahren nur möglich, wenn sich Venus bei dem ersten weder im Knoten noch sehr nahe demselben befand. Mit anderen Worten: der eine Durchgang muß vor, der zweite nach dem Passieren des Knotens stattfinden. Dies ist in der Tat bei Venus der Fall, und es erfolgen daher in der Nähe des Knotens zwei Durchgänge im Intervall von 8 Jahren. Ein dritter Durchgang nach Ablauf weiterer 8 Jahre tritt aber dann unter keinen Umständen ein.

Mit dem nächsten Näherungswert erhält man:

382	siderische	Umläufe	der Venus	85835.42^d
147	synodische	„	„ „	85835.51
235	siderische	„	„ Erde	85835.23.

Hieraus folgt: hat ein Vorübergang stattgefunden, so wiederholt sich derselbe in bezug auf eben diesen Knoten nach einer Periode von 235 Jahren.

Mit dem weiteren Näherungswert erhält man:

395	siderische	Umläufe	der Venus	88756.81^d
152	synodische	„	„ „	88754.73
243	siderische	„	„ Erde	88757.29.

Hieraus folgt: ein weiterer Durchgang findet nach dem Passieren des Knotens statt 8 Jahre nach dem zuletzt betrachteten ($235 + 8 = 243$).

Damit ist die Periode für den einen, aufsteigenden Knoten erschöpft, und wir wenden uns jetzt dem absteigenden Knoten zu. Die Periode von 235 Jahren hat für diesen Knoten keine Be-

deutung, weil 382 eine gerade Zahl ist. Dagegen gibt die Periode von 243 Jahren sowohl bei der Erde wie bei der Venus eine ganze Anzahl von Umläufen vermehrt um die Hälfte eines solchen, nämlich $\frac{1}{2} \cdot 243$ und $\frac{1}{2} \cdot 395$ geben 121,5 und 197,5, welche auf den absteigenden Knoten Bezug haben.

Auf Grund dieser Betrachtungen ergibt sich das folgende Schema der Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe:

Aufsteigender Knoten	Absteigender Knoten	Intervall	♀ Ort	Projektion	Epoche des Vorüberganges
t			nach ☊	über ☉ Mitte	1631 Dez. 7
$t+8$		8	vor ☊	unter „ „	1639 „ 4
	$t+8+121{,}5$	121,5	nach ♈	unter „ „	1761 Jun. 6
	$t+8+121{,}5+8$	8	vor ♈	über „ „	1769 „ 3
$t+243$		105,5	nach ☊	über „ „	1874 Dez. 8
$t+243+8$		8	vor ☊	unter „ „	1882 „ 6
	$t+243+8+121{,}5$	121,5	nach ♈	unter „ „	2004 Jun. 7
	$t+243+8+121{,}5+8$	8	vor ♈	über „ „	2012 „ 5
$t+2 \cdot 243$		105,5	nach ☊	über „ „	2117 Dez. 10
$t+2 \cdot 243+8$		8	vor ☊	unter „ „	2125 „ 8
. . . . .	. . . . .	. . .	. . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . .	. . .	. . . . .	. . . . .

Dieselben Betrachtungen lassen sich für Merkur durchführen, der infolge seiner größeren mittleren täglichen Bewegung viel häufiger als Venus die Sonnenscheibe passiert, im Durchschnitt 13 mal im Jahrhundert.

Für Merkur hat man:

$$m \cdot 115.88^{\mathrm{d}} = n \cdot 87.97^{\mathrm{d}},$$

und dies gibt den Kettenbruch:

$$\frac{n}{m} = \frac{115.88}{87.97} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}},$$

dessen Näherungswerte vom vierten an sind:

$$\frac{29}{22},\quad \frac{54}{41},\quad \frac{137}{104},\quad \frac{191}{145},$$

und man hat:

29 siderische Umläufe des Merkur		2551.14^d
22 synodische „ „ „		2549 36
7 siderische „ der Erde		2556.79

und:

54 siderische Umläufe des Merkur	4750.38^d
41 synodische „ „ „	4751.00
13 siderische „ der Erde	4748.33.

Die höheren Perioden von 33 und 46 Jahren lassen sich aus den beiden von 7 und 13 Jahren komponieren. Hieraus ergibt sich das Schema:

Aufsteigender Knoten	Absteigender Knoten	Epoche des Vorüberganges
t		1868 Nov.
	$t + 9{,}5$	1878 Mai
$t + 13$		1881 Nov.
	$t + 9{,}5 + 13$	1891 Mai
$t + 2 \cdot 13$		1894 Nov.
$t + 3 \cdot 13$		1907 Nov.
$t + 3 \cdot 13 + 7$		1914 Nov.
	$t + 9{,}5 + 3 \cdot 13 + 7$	1924 Mai
$t + 4 \cdot 13 + 7$		1927 Nov.
. . . . .	. . . . .	1937 Mai
. . . . .	. . . . .	. . . . .

Die Durchgänge kehren also in Perioden von 46 Jahren wieder, und zwar jedesmal vier im November und zwei im Mai in der Reihenfolge: November, November, November, Mai, November, Mai. Die Intervalle sind: 13; 7; 9,5; 3,5; 9,5; 3,5 Jahre.

Bei Merkur ist die Länge des aufsteigenden Knotens $47^0 16'$. Bei einem Vorübergang vor der Sonne muß deren geozentrische Länge $47^0 16' + 180^0 = 227^0 16'$ betragen, und diese erreicht die Sonne zu Anfang November. Merkurvorübergänge in der Nähe des aufsteigenden Knotens können daher nur zu Anfang

November stattfinden. Analog ergibt sich, daß solche Vorübergänge in der Nähe des absteigenden Knotens nur zu Anfang Mai stattfinden werden. Während innerhalb 46 Jahren 4 Novemberdurchgänge erfolgen, kommen in diesem Zeitraum nur 2 Maidurchgänge zustande.

Nach dieser allgemeinen Übersicht gehen wir zur Theorie der Planetenvorübergänge über, indem wir zunächst den Verlauf der Erscheinung für den Erdmittelpunkt und hierauf für irgendeinen Oberflächenort der Erde in Betracht ziehen.

10. Berechnung der Phasen eines Merkur- oder Venusdurchgangs für den Mittelpunkt der Erde.

Nachdem wir gesehen haben, wie sich auf Grund der Perioden das Jahr und der ungefähre Zeitpunkt eines Planetenvorüberganges ermitteln läßt, wird es sich jetzt um die Berechnung der Phasen dieser Erscheinung handeln.

Als Ausgangspunkt der Rechnung wählt man am zweckmäßigsten den Zeitpunkt T der Konjunktion in Rektaszension von Sonne und Planet. Es empfiehlt sich dann, die scheinbaren Rektaszensionen und Deklinationen der Sonne $\alpha_\odot$ und $\delta_\odot$, sowie des Planeten α und δ aus den Ephemeriden der Jahrbücher (Berl. Jahrbuch, Connaissance des temps, Nautical Almanac) für die der Konjunktion vorangehenden und folgenden drei vollen Stunden zu interpolieren. Bemerkt sei hierzu, daß das Berliner Jahrbuch „scheinbare Sonnenkoordinaten", aber „wahre Planetenkoordinaten" gibt. Da wir hier scheinbare Planetenörter brauchen, ist bei der Interpolation die Aberrations- oder Lichtzeit zu berücksichtigen, d. h. die Planetenörter sind mit der um $498.5^s \cdot \Delta$ verminderten Epoche den Ephemeriden zu entnehmen[1]). Der jeweilige geozentrische Abstand Δ ist ebenfalls in den Ephemeriden verzeichnet sowie auch der Sonnen- und der Planetenhalbmesser.

Sind dann μ und $\mu_\odot$ die der Ausgangsepoche zunächst liegenden stündlichen Bewegungen von Planet und Sonne in Rektaszension, ν und $\nu_\odot$ diejenigen in Deklination, d die Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne, $H_\odot$ der Halbmesser der Sonne und s der-

1) Ist eine Ephemeride wahrer Örter für bestimmte äquidistante Zeitmomente berechnet, so erhält man daraus die scheinbaren Örter für dieselben Zeiten, wenn man aus der Ephemeride die Örter für die Zeitmomente t — Aberrationszeit interpoliert.

jenige des Planeten, so hat man wie in der Theorie der Mondfinsternisse (Nr. 6) die Formeln:

$$m=\mu-\mu_\odot,\ n=\nu-\nu_\odot,\ d=H_\odot \pm s \begin{cases} \text{äußere} \\ \text{innere} \end{cases} \text{Berührung.}$$

$$a\sin A=[\alpha-\alpha_\odot]\cos\delta', \qquad b\sin B=m\cos\delta',$$
$$a\cos A=\delta-\delta_\odot, \qquad b\cos B=n,$$

wo $\delta'=\frac{1}{2}(\delta+\delta_\odot)$, a und b stets positiv zu nehmen und die Winkel A, B, α vom Nordpunkt im Sinne der wachsenden Rektaszensionen über Osten zu zählen sind. Ferner:

$$\sin(\alpha-B)=\frac{a\sin(A-B)}{d},$$

wobei für den Eintritt $\cos(\alpha-B)$ negativ, für den Austritt positiv zu nehmen ist, und:

$$\tau'=-\frac{a\cos(A-B)}{b}-\frac{d\cos(\alpha-B)}{b},$$
$$\tau''=-\frac{a\cos(A-B)}{b}+\frac{d\cos(\alpha-B)}{b}.$$

Eintritt des Planeten $=T+\tau'$, Positionswinkel des Eintritts $P'=\alpha'$
Austritt „ „ $=T+\tau''$, „ „ Austritts $P''=\alpha''$,
gezählt am Mittelpunkt der Sonne von Norden über Osten.

11. Berechnung der Phasen des Merkurdurchgangs 1907 Nov. 13—14 für den Erdmittelpunkt.

Die aus dem Berl. Jahrbuch für 1907 interpolierten Sonnenkoordinaten sind:

1907 mittl. Berl. Zeit		$\alpha_\odot$	$\mu_\odot$	$\delta_\odot$	$\nu_\odot$
Nov. 13	22^h	$15^h 13^m 38.40^s$		$-17^0 58' 30.2''$	
			$+10.20^s$		$-39.9''$
„	23	13 48.60		59 10.1	
			+10.22		−39.8
Nov. 14	0	13 58.82		59 49.9	
			+10.21		−39.8
„	1	14 9.03		−18 0 29.7	
			+10.22		−39.8
„	2	14 19.25		1 9.5	
			+10.22		−39.8
„	3	14 29.47		1 49.3	

Die Lichtzeit für Merkur ($\log \Delta = 9.8303$) war am 14. Nov. $5^m 37^s = 0.0936^h$. Mit Berücksichtigung dieses Betrages sind aus der Ephemeride der wahren Örter des Merkur die folgenden scheinbaren Örter interpoliert:

1907 mittl. Berl. Zeit	α	μ	δ	ν
Nov. 13 22^h	$15^h 15^m 8.48^s$		$-17^0 54' 3.3''$	
		-12.69^s		$+1'42.6''$
„ 23	14 55.79		52 20.7	
		-12.69		$+1\ 42.5$
Nov. 14 0	14 43.10		50 38.2	
		-12.68		$+1\ 42.7$
„ 1	14 30.42		48 55.5	
		-12.68		$+1\ 42.7$
„ 2	14 17.74		47 12.8	
		-12.66		$+1\ 42.7$
„ 3	14 5.08		45 30.1	

Die Konjunktionszeit von Sonne und Merkur fällt auf den 14. November zwischen 1^h und 2^h. Die Interpolation ergibt den genauen Wert:

Konjunktionszeit $T =$ Nov. 14 1.9340^h

Damit erhalten wir die Elemente der Rechnung:

α und $\alpha_\odot$ zur Zeit der Konjunktion . . .	$15^h 14^m 18.6^s$
δ	$-17^0 47' 19.6''$
$\delta_\odot$	$-18\ 1\ 6.9$
Stündl. Bewegung des Merkur in $AR = \mu$ . . .	$-3'10.1''$
„ „ der Sonne „ „ $= \mu_\odot$ . . .	$+2\ 33.2$
Stündl. Bewegung des Merkur in Dekl. $= \nu$ . . .	$+1\ 42.7$
„ „ der Sonne „ „ $= \nu_\odot$ . .	-39.8
Äquatorialparallaxe des Merkur $= p$	13.0
„ der Sonne $= \pi$	8.9
Halbmesser des Merkur $= s$	4.9
„ der Sonne $= H_\odot$	16 10.1
Sternzeit im mittleren Mittag $= \Theta_0$ Nov. 13 .	$15^h 25^m 39.48^s$
„ „ „ „ „ „ „ 14 .	15 29 36.04

Erste Näherung:

Ausgangsepoche $T =$ Nov. 14 $1^h.9340$

$\alpha - \alpha_\odot = 0$, $\delta - \delta_\odot = +827.3''$, $\delta' = \frac{1}{2}(\delta + \delta_\odot) = -17^0 54' 13.2''$

$m = \mu - \mu_\odot = -343.3''$, $n = \nu - \nu_\odot = +142.5''$,

$d = H_\odot + s = 975.0''$ (äuß. Ber.), $d = H_\odot - s = 965.2''$ (inn. Ber.)

$\log m = 2.535674_n$	$B = 293^0 34' 2.8''$
$\log \cos \delta' = 9.978443$	$A - B = 66\ 25\ 57.2$
$\log b \sin B = 2.514117_n$	$\log b \sin B = 2.514117_n$
$\log b \cos B = 2.153815$	$\log \sin B = 9.962175_n$
$\log \operatorname{tg} B = 0.360302_n$	$\log b = 2.551942$
$\log a = 2.917663$	
$\log \sin (A - B) = 9.962175$	$\alpha' - B = 128^0 56' 46.0''$
$\log a \sin (A - B) = 2.879838$	$\alpha'' - B = 51\ 3\ 14.0$
$\log d = 2.989005$	$\alpha' = 62\ 30\ 48.8$
$\log \sin (\alpha - B) = 9.890833$	$\alpha'' = 344\ 37\ 16.8$
$\log a = 2.917663$	$\log d = 2.989005$
$\log \cos (A - B) = 9.601873$	$\log \cos (\alpha - B) = 9.798367$
$\log a \cos (A - B) = 2.519536$	$\log d \cos (\alpha - B) = 2.787372$
$\log b = 2.551942$	$\log b = 2.551942$
$\log \frac{a}{b} \cos (A - B) = 9.967594$	$\log \frac{d}{b} \cos (\alpha - B) = 0.235430$
$\frac{a}{b} \cos (A - B) = 0.9281^h$	$\frac{d}{b} \cos (\alpha - B) = 1.7196^h$
Nov. 13 $T = 25.9340^h$	Nov. 14 $T = 1.9340$
$\tau' = -2.6477$	$\tau'' = +0.7915$
Eintritt $T + \tau' = 23.2863$	Austritt $T + \tau'' = 2.7255$
$= 23^h 17^m 10.7^s$	$= 2^h 43^m 31.8^s$
(Nov. 13)	(Nov. 14)

Positionswinkel des Eintritts $P' = \alpha' = 62^0 31'$ östlich

„ „ Austritts $P'' = \alpha'' = 344\ 37$ „

Zweite Näherung:

Mit der gefundenen Ein- und Austrittszeit sind jetzt sämtliche veränderlichen Elemente abermals zu interpolieren, und damit ist die Rechnung noch einmal gesondert für Ein- und Austritt durchzuführen. Man erhält so die definitiven Werte:

Eintritt $T + \tau' = 23^h 17^m 16^s$ (Nov. 13) Austritt $T + \tau'' = 2^h 43^m 32^s$ (Nov. 14) mittl. Zeit Berlin.

Positionswinkel des Eintritts $P' = \alpha' = 62^0 29' 29''$ östl.
„ „ Austritts $P'' = \alpha'' = 344\ 37\ 58$ „

Die Grenzen der Sichtbarkeit des Phänomens werden dadurch bestimmt, daß man die geographischen Koordinaten des Zenitpunktes der Sonne für Ein- und Austritt berechnet. Ist l die westliche Länge des Zenitpunktes der Sonne gegen Greenwich, so hat man:

$$l = \left.\begin{matrix} T' \\ T'' \end{matrix}\right\} - \text{Zeitgl.} - \text{Längendifferenz Berl.-Greenw.,}$$

also:

$T' =$	23^h	17^m	16^s		$T'' =$	2^h	43^m	32^s	
$-$ Zeitgl. $= +$		15	36		$+$		15	36	
	23	32	52			2	59	8	
Längendifferenz $=$		53	35				53	35	
$l' =$	22	39	17	westl.	$l'' =$	2	5	33	westl.
$=$	1	20	43	östl.		21	54	27	östl.
$=$	$20^0 11'$			„		328^0	$37'$		„
				v. Greenw,					v. Greenw.

$$\Phi' = \delta'_\odot = -17^0 59' \qquad \Phi'' = \delta''_\odot = -18^0 2'.$$

Die Reduktion der geozentrischen auf geographische Breite beträgt $-7'$, also geographische Breite:

$$\Phi' = -18^0 6' \qquad \Phi'' = -18^0 9'.$$

Die Zeiten für den inneren Kontakt beim Eintritt und Austritt des Merkur werden in derselben Weise mit der Distanz für innere Berührung $d = 965.2''$ berechnet.

12. Berechnung der Phasen eines Merkur- oder Venusdurchgangs für einen Ort der Erdoberfläche.

Während die Phasen einer Mondfinsternis von allen Punkten der Erdoberfläche, an denen die Erscheinung überhaupt sichtbar ist, in demselben absoluten Moment wahrgenommen werden, ist dies infolge der parallaktischen Verschiebung bei den Planetenvorübergängen vor der Sonnenscheibe nicht der Fall. Es wird sich jetzt darum handeln, den Einfluß dieser parallaktischen Verschiebung auf die Ein- und Austrittszeiten zu vermitteln.

In der Figur 8 sei C das Erdzentrum, Z der Zenitpunkt des Beobachtungsortes O an der Sphäre, S und P seien die geozentrischen Örter von Sonne und Planet, S' und P' die Örter dieser Gestirne, wie sie sich vom Erdort O aus auf die Sphäre projizieren. Es seien ferner Z und z die geozentrischen Zenitdistanzen von Sonne und Planet, Z' und z' die mit Parallaxe behafteten Zenitdistanzen eben dieser Gestirne, $SP = a$ die geozentrische Distanz von Sonne und Planet, $S'P' = a'$ die mit Parallaxe behaftete Distanz, wie sie vom Beobachtungsort O aus erscheint.

Zwischen der mit Parallaxe behafteten Distanz a' und der geozentrischen a beider Gestirne wird eine Differenz $a' - a$ bestehen, die zur Folge hat, daß ein auf der Erdoberfläche befindlicher Beobachter, je nach der Lage des Erdortes, den Eintritt des Planeten in die Sonnenscheibe früher oder später sieht als ein im Mittelpunkt der Erde gedachter Beobachter.

Es sei nun T' die Zeit des ersten Meridians, in welcher ein Beobachter in O die Ränderberührung von Sonne und Planet wahrnimmt. Die diesem Zeitmoment entsprechende Distanz a' wird, vom Erdmittelpunkt aus betrachtet, nicht gleich der Summe der Halbmesser beider Gestirne sein, sondern davon um einen Betrag abweichen, der durch die Parallaxen dieser Gestirne bedingt ist. Infolge der relativen Bewegung der Gestirne wird dann der Zeitmoment T erreicht, in welchem, vom Mittelpunkt der Erde betrachtet, die Ränderberührung eintritt, d. h. die zu T gehörige Distanz a gleich der Summe der Halbmesser beider Gestirne wird. Da sich T' und T nur wenig voneinander unterscheiden, kann man die Änderung der Distanz a' in der kleinen Zwischenzeit $T' - T$ als gleichförmig betrachten, also setzen:

$$a = a' + \frac{da}{dt}(T' - T) \ldots,$$

woraus folgt:

$$T' = T - \frac{a' - a}{\frac{da}{dt}}.$$

$\frac{da}{dt}$ ist die stündliche Änderung der Distanz; sie läßt sich aus den Gleichungen (Nr. 10):

$$a \sin A = [\alpha - \alpha_\odot] \cos \delta', \qquad a \cos A = \delta - \delta_\odot$$

oder der daraus folgenden:

$$a = [\alpha - \alpha_\odot] \cos \delta' \sin A + [\delta - \delta_\odot] \cos A$$

durch Differenzieren ableiten. Man hat:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d[\alpha - \alpha_\odot]}{dt} \cos \delta' \sin A + \frac{d[\delta - \delta_\odot]}{dt} \cos A,$$

oder da die Differentialquotienten identisch mit m und n sind:

$$\frac{d[\alpha - \alpha_\odot]}{dt} \cos \delta' = b \sin B \quad \text{und} \quad \frac{d[\delta - \delta_\odot]}{dt} = b \cos B$$

$$\frac{da}{dt} = b \sin B \sin A + b \cos B \cos A = b \cos (A - B).$$

Die Formel sagt aus, daß die stündliche Änderung der Distanz a gleich der Projektion der relativen stündlichen Bahngeschwindigkeit b auf die Richtung der Distanz a ist, was an sich verständlich ist. Wir haben also:

$$T' = T - \frac{a' - a}{b \cos (A - B)}.$$

Damit sind die Zeiten der Ränderberührung für einen Ort O der Erdoberfläche auf die entsprechenden Zeiten für den Erdmittelpunkt zurückgeführt. Die Differenz $a' - a$ zwischen der parallaktisch modifizierten Distanz und der geozentrischen erscheint hierin als eine Größe, welche in Funktion der Parallaxen von Sonne und Planet und der Ortskoordinaten des Punktes O darzustellen ist. Eine sehr elegante Form hierfür hat Lagrange 1766 in den Memoiren der Berl. Akademie der Wissenschaften unter dem Titel „Mémoire sur le Passage de Venus du 3 juin 1769" gegeben. Sie soll im folgenden abgeleitet werden.

Bezeichnen wir in den Dreiecken SZP und $S'ZP'$ den Winkel bei Z mit w, so wird:

$$\cos a = \cos z \cos Z + \sin z \sin Z \cos w$$
$$\cos a' = \cos z' \cos Z' + \sin z' \sin Z' \cos w.$$

Da $a' - a$, $z' - z$, $Z' - Z$ kleine Größen von der Ordnung der Parallaxen sind, deren Quadrate vernachlässigt werden können, kann man setzen:

$$\begin{aligned}\cos z' \cos Z' &= \cos(z' - z + z) \cos(Z' - Z + Z) \\ &= [\cos(z' - z) \cos z - \sin(z' - z) \sin z][\cos Z' - Z) \cos Z \\ &\qquad - \sin(Z' - Z) \sin Z] \\ &= [\cos z - \sin 1'' (z' - z) \sin z][\cos Z \\ &\qquad - \sin 1'' (Z' - Z) \sin Z] \\ &= \cos z \cos Z - [\cos z \sin Z (Z' - Z) \\ &\qquad + \sin z \cos Z (z' - z)] \sin 1''\end{aligned}$$

und in gleicher Weise:

$$\begin{aligned}\sin z' \sin Z' = \sin z \sin Z + [&\sin z \cos Z (Z' - Z) \\ &+ \cos z \sin Z (z' - z)] \sin 1''\end{aligned}$$

und:

$$\cos a' = \cos a - (a' - a) \sin a \sin 1''.$$

Damit wird:

$$\begin{aligned}(a' - a) \sin a = &[\sin z \cos Z - \cos z \sin Z \cos w] (z' - z) \\ &+ [\cos z \sin Z - \sin z \cos Z \cos w] (Z' - Z).\end{aligned}$$

Es seien nun $P_s = ZSP$ und $P_p = 180^0 - ZPS$ die am Sonnen- und Planetenmittelpunkt vom Vertikalkreis aus gegen Osten gezählten Positionswinkel der Distanz a; dann folgt aus Dreieck SZP:

$$\sin a \cos P_s = \sin Z \cos z - \cos Z \sin z \cos w$$
$$- \sin a \cos P_p = \cos Z \sin z - \sin Z \cos z \cos w,$$

womit sich die Distanzdifferenz in der einfachen Form darstellt:

$$a' - a = [Z' - Z] \cos P_s - [z' - z] \cos P_p,$$

welche geometrisch leicht zu deuten ist.

$Z' - Z$ und $z' - z$ sind jetzt durch die bekannten Horizontalparallaxen π und p von Sonne und Planet auszudrücken. Ist in

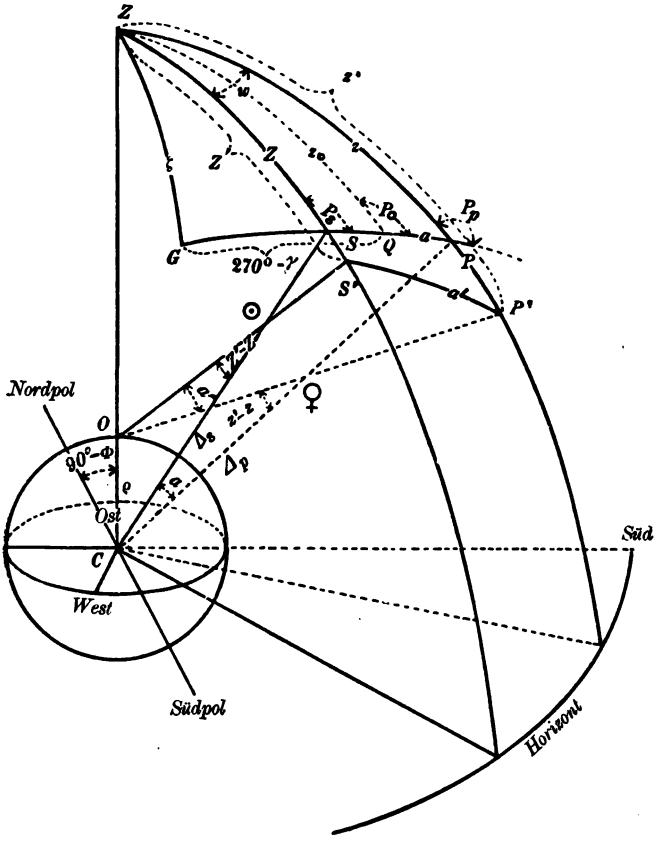


Fig. 8.

Fig. 8 ⊙ der wahre Ort der Sonne, so erhält man aus Dreieck $CO\odot$:

$$\frac{\sin(Z' - Z')}{\sin(180^0 - Z')} = \frac{\varrho}{\Delta_s},$$

wo ϱ der Erdradius des Ortes O und Δ_s der Abstand der Sonne

vom Erdmittelpunkt ist. Hieraus folgt mit ausreichender Annäherung:

$$Z' - Z = \frac{\varrho}{\Delta_s \cdot \sin 1''} \cdot \sin Z = \frac{\varrho}{a} \cdot \frac{a}{\Delta_s \cdot \sin 1''} \cdot \sin Z,$$

worin a den Äquatorialhalbmesser der Erde darstellt. Da für die Sonne und entsprechend für den Planeten:

$$\frac{a}{\Delta_s \cdot \sin 1''} = \pi \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{\Delta_p \cdot \sin 1''} = p$$

die Horizontal-Äquatorialparallaxen sind, und man für $\frac{\varrho}{a}$ einfach ϱ schreiben kann, wenn man den Erdradius in Einheiten des Äquatorialhalbmessers der Erde mißt, hat man:

$$Z' - Z = \varrho\pi \sin Z \quad \text{und} \quad z' - z = \varrho p \sin z,$$

womit die Gleichung für die parallaktisch modifizierte Distanz wird:

$$a' - a = \varrho\pi \sin Z \cos P_s - \varrho p \sin z \cos P_p.$$

Ist nun Q der Halbierungspunkt der Distanz a, z_0 die Zenitdistanz von Q und P_0 der östliche Positionswinkel der Distanz bei Q, so geben die Dreiecke ZQS und ZQP die folgenden Relationen:

$$\sin Z \cos P_s = \sin \tfrac{1}{2} a \cos z_0 + \cos \tfrac{1}{2} a \sin z_0 \cos P_0$$
$$- \sin z \cos P_p = \sin \tfrac{1}{2} a \cos z_0 - \cos \tfrac{1}{2} a \sin z_0 \cos P_0,$$

die, in die vorstehende Gleichung substituiert, zu:

$$a' - a = \varrho \left[(p + \pi) \sin \tfrac{1}{2} a \cos z_0 - (p - \pi) \cos \tfrac{1}{2} a \sin z_0 \cos P_0\right]$$

führen. Setzt man:

$$(1) \quad \begin{cases} (p + \pi) \sin \tfrac{1}{2} a = g \sin \gamma \\ (p - \pi) \cos \tfrac{1}{2} a = g \cos \gamma \end{cases}, \text{ also: } \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{p + \pi}{p - \pi} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \quad g = p - \pi, \text{ (genähert)}$$

so wird:

$$a' - a = g \varrho \left[\sin \gamma \cos z_0 - \cos \gamma \sin z_0 \cos P_0\right].$$

Diese Formel läßt sich, wie Lagrange gezeigt hat, geometrisch interpretieren. Verlängert man nämlich die sphärische Seite a nach Westen bis G dergestalt, daß:

$$QG = 270^0 - \gamma$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach Osten, so daß $QG = 90^0 + \gamma$ ist, so wird im Dreieck ZQG, wenn $ZG = \zeta$ ist:

$$\cos\zeta = \cos(270^0 - \gamma)\cos z_0 + \sin(270^0 - \gamma)\sin z_0 \cos(180^0 - P_0)$$
$$= -\sin\gamma\cos z_0 + \cos\gamma \sin z_0 \cos P_0$$

und damit:

$$a' - a = -g\varrho\cos\zeta \quad \text{oder} \quad a' = a - g\varrho\cos\zeta.$$

Die Formel sagt: Alle Orte der Erdoberfläche, die in derselben Poldistanz ζ vom Ort G als Pol, also auf einem Kreise um G liegen, der mit dem Radius ζ beschrieben ist, sehen in demselben absoluten Moment dieselbe scheinbare Distanz a' der Mittelpunkte beider Gestirne.

Für die Bestimmung der Ein- und Austrittszeiten des Planeten für einen Erdort O aus den entsprechenden Zeiten für den Erdmittelpunkt wird es sich nun wesentlich um die Ermittelung der uranographischen Koordinaten des Punktes G, d. h. der Polhöhe und Sternzeit desselben handeln.

Zunächst ist klar, daß man mit genügender Annäherung im Moment der Ränderberührung für die Koordinaten des intermediären Punktes Q setzen kann:

$$(2) \qquad \alpha_0 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_\odot) \qquad \delta_0 = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta_\odot)$$

und

$$(3) \qquad P_0 = \begin{cases} P' = \alpha' = \text{Positionswinkel für Eintritt} \\ P'' = \alpha'' = \quad \text{„} \quad \text{„ Austritt.} \end{cases}$$

Man kann dann die Koordinaten von G durch diejenigen von Q, also durch bekannte Größen ausdrücken. Denn ist Θ' die Sternzeit, Φ' die Polhöhe von G, so ergeben sich aus dem Dreieck PGQ folgende Relationen[1]) (Fig 9):

$$\cos\Phi'\sin(\alpha_0 - \Theta') = -\cos\gamma\sin P_0$$
$$\cos\Phi'\cos(\alpha_0 - \Theta') = -\sin\gamma\cos\delta_0 - \cos\gamma\sin\delta_0\cos P_0$$
$$\sin\Phi' \qquad\qquad = -\sin\gamma\sin\delta_0 + \cos\gamma\cos\delta_0\cos P_0,$$

1) Man beachte, daß der Winkel P_0 in Formel (3) nicht identisch ist mit dem obigen und in Figur 8 mit P_0 bezeichneten Winkel, sondern es ist der vom Nordpunkt über Osten, also vom Meridian aus gezählte Positionswinkel der Distanz a im Punkt Q, d. h. in Fig. 9 ist $PQG = 180^0 - P_0$.

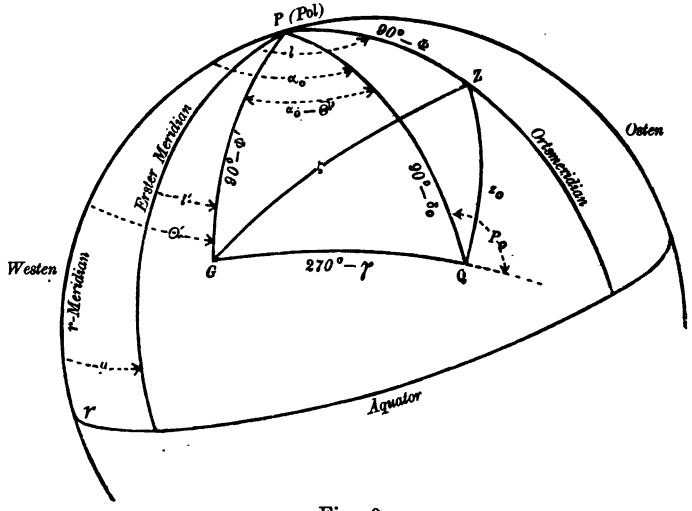


Fig. 9.

die durch Einführung der Hilfsgrößen f und F mittels der Gleichungen:

$$f \sin F = \sin \gamma \text{ und } f \cos F = \cos \gamma \cos P_0 \tag{4}$$

in folgender, für die Rechnung geeigneter Form geschrieben werden können:

$$\begin{cases} \cos \Phi' \sin (\alpha_0 - \Theta') = -\cos \gamma \sin P_0 \\ \cos \Phi' \cos (\alpha_0 - \Theta') = -f \sin (\delta_0 + F) \\ \sin \Phi' \qquad\qquad\quad = \quad f \cos (\delta_0 + F) \end{cases} \tag{5}$$

und als Bestimmungsgleichungen für Φ' und Θ' dienen.

Es sei nun μ die Sternzeit, welche der mittl. Zeit T des ersten Meridians für den Ein- bzw. Austritt des Planeten entspricht, also:

$$\mu = \Theta_0 + T \cdot \frac{24^h + 3^m 56.555^s}{24^h}, \tag{6}$$

wo Θ_0 die Sternzeit im mittl. Mittag darstellt, dann wird:

$$l' = \Theta' - \mu \tag{6*}$$

die östliche Länge des Punktes G gegen den ersten Meridian oder den Meridian der Ephemeride sein.

Mit den jetzt bekannten Φ' und l' kann man aber leicht $\cos\zeta$ für einen gegebenen Erdort Z bestimmen. Sind Φ die Polhöhe und l die östliche Länge des Erdortes (Fig. 9), so ist im Dreieck GPZ der Winkel am Pol $l - l'$ und:

$$\cos\zeta = \sin\Phi' \sin\Phi + \cos\Phi' \cos\Phi \cos(l' - l).$$

Da nach dem obigen:

$$T' = T - \frac{a' - a}{b\cos(A - B)} = T + \frac{g\varrho\cos\zeta}{b\cos(A - B)},$$

und für Ein- und Austritt A mit α identisch wird, so hat man schließlich:

$$T' = T + \frac{g\varrho\sin\Phi'}{b\cos(\alpha - B)}\sin\Phi + \frac{g\varrho\cos\Phi'}{b\cos(\alpha - B)}\cos\Phi\cos(l' - l),$$

und zwar ist $b\cos(\alpha - B)$ für den Eintritt negativ, für den Austritt positiv zu nehmen.

Da die Einheit für b die Stunde ist, so wird die kleine zeitliche Korrektion wegen Parallaxe in Stunden erhalten. Um sie in Zeitsekunden auszudrücken, muß man mit 3600 multiplizieren. Setzt man dann die Konstanten:

$$(7)\qquad \frac{3600\,(p - \pi)\sin\Phi'}{b\cos(\alpha - B)} = \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \frac{3600\,(p - \pi)\cos\Phi'}{b\cos(\alpha - B)} = \mathfrak{C},$$

so hat man:

$$(8)\qquad T' = T + \mathfrak{B}\,\varrho\sin\Phi + \mathfrak{C}\,\varrho\cos\Phi\cos(l' - l)$$

in Zeit des ersten Meridians und in Ortszeit $T' + l$. In den Jahrbüchern sind die Logarithmen der Konstanten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ vierstellig angegeben. Für einen durch ϱ, Φ und l gegebenen Erdort erhält man also aus dieser Formel die lokalen Ein- und Austrittszeiten des Planeten aus den entsprechenden Zeiten für den Erdmittelpunkt, und zwar ist bei Berücksichtigung der Erdabplattung Φ die geozentrische Breite und ϱ der dazu gehörige Erdradius.

Als Beispiel der Berechnung von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und l' wählen wir den Merkurdurchgang 1907 Nov. 13—14. Die Rechnungsdaten sind nach Nr. 11:

$p = 13.0''$, $p + \pi = 21.9''$, a(für Ein- u. Austritt) $= H_\odot + s = 975.0''$

$\pi = 8.9$, $p - \pi = 4.1$, $\quad \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(H_\odot + s) = 487.5'' = 8'\,7.5''$.

Hiermit stellt sich die Rechnung für die äußere Berührung so:

(Formel 1):

$\log(\pi+p) = 1.34044$ $\qquad \gamma = 0^0 43' 24''$

$\log(\pi-p) = 0.61278$

$\log \frac{\pi+p}{\pi-p} = 0.72766$ $\qquad \log \sin\gamma = 8.10118$

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(H_\odot + s) = 7.37355$

$\log \operatorname{tg}\gamma = 8.10121$ $\qquad \log\cos\gamma = 9.99996$

	Eintritt. (§ 11).	Austritt.
$T =$	$23^h 17^m 16^s$	$= 2^h 43^m 32^s$
$\alpha =$	$15^h 14^m 52.14^s$	$= 15^h 14^m 8.56^s$
$\alpha_\odot =$	$15\ 13\ 51.54$	$= 15\ 14\ 26.66$
$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha+\alpha_\odot) =$	$15\ 14\ 21.84$	$= 15\ 14\ 17.61$
	$= 228^0 35' 27.60''$	$= 228^0 34' 24.15''$
$\delta =$	$-17^0 51' 51.2''$	$= -17^0 45' 58.3''$
$\delta_\odot =$	$-17\ 59\ 21.6$	$= -18\ 1\ 38.4$
$\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta+\delta_\odot) =$	$-17\ 55\ 36.4$	$= -17\ 53\ 48.3$
	$P' = 62^0 29' 29''$	$P'' = 344^0 37' 58''$

(Formel 4):

$\log\cos\gamma =$	9.99996	$= 9.99996$
$\log\cos P_0 =$	9.66453	$= 9.98419$
$\log f \sin F =$	8.10118	$= 8.10118$
$\log f\cos F =$	9.66449	$= 9.98415$
$\log \operatorname{tg} F =$	8.43669	$= 8.11703$
$F =$	$1^0 33' 56''$	$= 0^0 45' 0$
$\delta_0 =$	$-17\ 55\ 36$	$= -17\ 53\ 48$
$\delta_0 + F =$	$-16\ 21\ 40$	$= -17\ 8\ 48$
$\log f\cos F =$	9.66449	$= 9.98415$
$\log\cos F =$	9.99984	$= 9.99996$
$\log f =$	9.66465	$= 9.98419$

(Formel 5):

$\log \sin (\delta_0 + F)$	$= 9.44977_n$	$= 9.46955_n$
$\log \cos (\delta_0 + F)$	$= 9.98205$	$= 9.98025$
$\log f \sin (\delta_0 + F)$	$= 9.11442_n$	$= 9.45374_n$
$\log f \cos (\delta_0 + F)$	$= 9.64670$	$= 9.96444$
$\log \cos \gamma$	$= 9.99996$	$= 9.99996$
$\log \sin P_0$	$= 9.94789$	$= 9.42325_n$
$\log \cos \Phi' \sin (\alpha_0 - \Theta')$	$= 9.94785_n$	$= 9.42321$
$\log \cos \Phi' \cos (\alpha_0 - \Theta')$	$= 9.11442$	$= 9.45374$
$\log \operatorname{tg} (\alpha_0 - \Theta')$	$= 0.83343_n$	$= 9.96947$
$\alpha_0 - \Theta'$	$= 278^0 20' 54''$	$= 42^0 59' 17''$
$\log \cos \Phi' \sin (\alpha_0 - \Theta')$	$= 9.94785_n$	$= 9.42321$
$\log \sin (\alpha_0 - \Theta')$	$= 9.99537_n$	$= 9.83368$
$\log \cos \Phi'$	$= 9.95248$	$= 9.58953$
$\log \sin \Phi'$	$= 9.64670$	$= 9.96444$

(Formel 7):

$\log 3600 (\pi - p)$	$= 4.16909$	$= 4.16909$
$\log b \cos (\alpha - B)$	$= 2.35036_n$	$= 2.35016$
$\log \frac{3600 (\pi - p)}{b \cos (\alpha - B)}$	$= 1.81873_n$	$= 1.81893$
$\log \mathfrak{B}$	$= 1.46543_n$	$= 1.78337$
$\log \mathfrak{C}$	$= 1.77121_n$	$= 1.40846$
$\alpha_0 - \Theta'$	$= 278^0 20' 54''$	$= 42^0 59' 17''$
α_0	$= 228\ 35\ 27$	$= 228\ 34\ 24$
Θ'	$= 310\ 14\ 33$	$= 185\ 35\ 7$

(Formel 6 und 6*):

T	$= 23^h 17^m 16^s$	$= 2^h 43^m 32^s$
Θ_0 (Sternzeit)	$= 15\ 25\ 39$	$= 15\ 29\ 36$
	$14\ 42\ 55$	$18\ 13\ 8$

Redukt. =	3 50	= 27
μ =	14 46 45	= 18 13 35
	= 221° 41′ 15″	= 273° 23′ 45″
l' =	88 33 18	= 272 11 22.

Hiermit wird:

Für den Eintritt und äußere Berührung:

$$T' = 23^h 17^m 16^s$$
$$- [1.4654]\varrho \sin \Phi - [1.7712]\varrho \cos \Phi \cos (88^0 33.3' - l).$$

Für den Austritt und äußere Berührung:

$$T' = 2^h 43^m 32^s$$
$$+ [1.7834]\varrho \sin \Phi + [1.4085]\varrho \cos \Phi \cos (272^0 11.4' - l)$$

in mittl. Zeit des Berl. Meridians, in Ortszeit $T' + l$, wobei l östlich von Berlin positiv zu nehmen ist. Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen sind Logarithmen, ausgedrückt in Einheiten der Zeitsekunde.

Es handle sich beispielsweise um die Ein- und Austrittszeit des Merkur für Königsberg. Für diesen Ort ist:

Geozentrische Breite $\Phi = + 54^0 32.0'$
Östl. Länge v. Berlin $l = 0^h 28^m 24^s = 7^0 6'$
Erdradius $\log \varrho = 9.9990$

und man hat:

T' (Eintritt) $= 23^h 17^m 16^s - 23.7^s - 5.1^s = 23^h 16^m 47^s$
T' (Austritt) $= 2^h 43^m 32^s + 49.4^s - 1.3^s = 2^h 44^m 20^s$

und in mittl. Ortszeit Königsberg:

T' (Eintritt) 1907 Nov. 13 $= 23^h 45^m 11^s$
T' (Austritt) 1907 Nov. 14 $= 3^h 12^m 44^s$.

III. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse.

13. Dimensionen des Schattenkegels des Mondes. Allgemeines über den Verlauf einer Sonnenfinsternis.

Es sei in Figur 10 R der lineare Halbmesser der Sonne, r derjenige des Mondes, G die Entfernung beider Gestirne, f der halbe Öffnungswinkel des Schattenkegels für innere Berührung

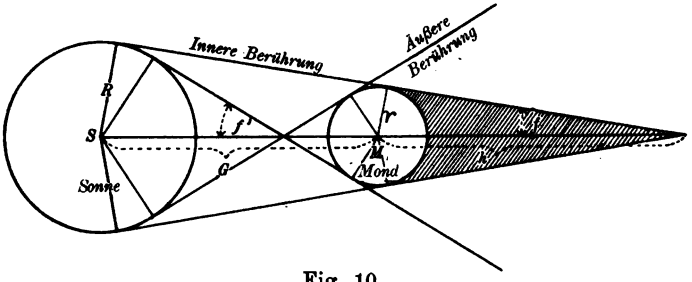


Fig. 10.

(des Kernschattenkegels), f' der halbe Öffnungswinkel für äußere Berührung (des Halbschattenkegels). Es ist dann, wie leicht ersichtlich:

$$\sin f = \frac{R-r}{G}, \qquad \sin f' = \frac{R+r}{G}.$$

Sind $H_\odot$ und $H_\leftmoon$ die vom Mittelpunkt der Erde gesehenen Winkelhalbmesser der Sonne und des Mondes, die den Entfernungen $\Delta_\odot$ und $\Delta_\leftmoon$ beider Gestirne entsprechen, $\pi_\odot$ und $\pi_\leftmoon$ die dazu gehörigen Horizontaläquatorialparallaxen, a der Äquatorialhalbmesser der Erde, so hat man:

$$R = \Delta_\odot \sin H_\odot, \qquad r = \Delta_\leftmoon \sin H_\leftmoon,$$
$$a = \Delta_\odot \sin \pi_\odot, \qquad a = \Delta_\leftmoon \sin \pi_\leftmoon,$$

und folglich:

$$\frac{R}{a} = \frac{\sin H_\odot}{\sin \pi_\odot}, \qquad \frac{r}{a} = \frac{\sin H_\leftmoon}{\sin \pi_\leftmoon}.$$

Setzt man für den Mond:

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin H_{\mathbb{C}}}{\sin \pi_{\mathbb{C}}} = k,$$

bezeichnet man also mit k den in Einheiten des Äquatorialradius der Erde ausgedrückten Mondhalbmesser, so hat man, wenn R und G in ebendieser Einheit $(a = 1)$ ausgedrückt werden:

$$R \pm r = \frac{\sin H_{\odot}}{\sin \pi_{\odot}} \pm k = \frac{1}{\sin \pi_{\odot}} [\sin H_{\odot} \pm k \sin \pi_{\odot}]$$

$$\left.\begin{matrix} \sin f' \\ \sin f \end{matrix}\right\} = \frac{1}{G \sin \pi_{\odot}} [\sin H_{\odot} \pm k \sin \pi_{\odot}].$$

Nach Auwers ist der der mittl. Parallaxe $\pi_{\odot} = 8.80''$ (Pariser Konferenz) entsprechende mittlere Halbmesser der Sonne $H_{\odot} = 15' 59.63''$. Für den Winkelhalbmesser des Mondes wird im Berl. Jahrbuch bei der Berechnung der Finsternisse und Sternbedeckungen der von J. Peters (Astr. Nachrichten Nr. 3297) ermittelte Wert $H_{\mathbb{C}} = 15'32.59''$, entsprechend der Parallaxe $\pi_{\mathbb{C}} = 57'\,2{,}27''$, benutzt. Hiermit ist das Verhältnis des Mondradius zum Erdradius:

$$k = 0.272518,$$

und man hat weiter:

$$\begin{aligned} \sin H_{\odot} &= 0.0046524 \\ k \sin \pi_{\odot} &= 0.0000116 \\ \hline \sin H_{\odot} + k \sin \pi_{\odot} &= 0.0046640 \\ \sin H_{\odot} - k \sin \pi_{\odot} &= 0.0046408 \end{aligned}$$

$$\log [\sin H_{\odot} + k \sin \pi_{\odot}] = 7.6687585 \text{ (äußere Berührung)}$$

$$\log [\sin H_{\odot} - k \sin \pi_{\odot}] = 7.6665929 \text{ (innere Berührung)}.$$

Die hier berechneten Zahlenwerte sind konstante Größen, welche in der Theorie der Sonnenfinsternisse von grundlegender Bedeutung sind und mit dem Fortschritt der Wissenschaft vielfach Verbesserungen erfahren haben.

Die Öffnungswinkel f und f' hängen von der Entfernung G von Sonne und Mond ab, die nunmehr durch bekannte Größen auszudrücken ist. Man hat mit dem Erdradius als Einheit:

$$G = \Delta_{\odot} - \Delta_{\mathbb{C}} = \frac{1}{\sin \pi_{\odot}} - \frac{1}{\sin \pi_{\mathbb{C}}},$$

oder wenn jetzt unter $\pi_\odot$ wie oben die mittlere Horizontaläquatorialparallaxe der Sonne 8.80″ verstanden und dementsprechend $\Delta_\odot$ in Einheiten der halben großen Achse der Erdbahn ausgedrückt wird:

$$G = \frac{\Delta_\odot}{\sin\pi_\odot} - \frac{1}{\sin\pi_\mathbb{C}} \quad \text{und} \quad G\sin\pi_\odot = \Delta_\odot\left[1 - \frac{\sin\pi_\odot}{\Delta_\odot\sin\pi_\mathbb{C}}\right].$$

Demnach hat man:

$$\left.\begin{matrix}\sin f' \\ \sin f\end{matrix}\right\} = \frac{\sin H_\odot \pm k\cdot\sin\pi_\odot}{\Delta_\odot\left(1 - \frac{\sin\pi_\odot}{\Delta_\odot\sin\pi_\mathbb{C}}\right)}$$

oder:

$$\sin f' = \frac{[7.6687585]}{\Delta_\odot\left(1 - \frac{[5.63006]}{\Delta_\odot\sin\pi_\mathbb{C}}\right)}, \qquad \sin f = \frac{[7.6665929]}{\Delta_\odot\left(1 - \frac{[5.63006]}{\Delta_\odot\sin\pi_\mathbb{C}}\right)},$$

worin $\Delta_\odot$ und $\sin\pi_\mathbb{C}$ als Veränderliche auftreten, während die in eckigen Klammern stehenden Größen die Logarithmen der Konstanten sind.

Ist f berechnet, so findet man den Abstand h der Spitze des Schattenkegels vom Mondmittelpunkt aus:

$$h = \frac{k}{\sin f},$$

und zwar ausgedrückt in Einheiten des Erdradius, während der in ebendiesen Einheiten dargestellte Abstand des Mondes von der Erde aus:

$$\Delta_\mathbb{C} = \frac{1}{\sin\pi_\mathbb{C}}$$

erhalten wird.

Um einen Anhalt zu gewinnen, innerhalb welcher Grenzen f schwanken kann, und wie zusammengehörige Werte von h und $\Delta_\mathbb{C}$ sich zueinander verhalten, ist es zweckmäßig, ihre Werte für die größte, mittlere und kleinste Sonnenentfernung, sowie für den größten, mittleren und kleinsten Wert der Mondparallaxe zu berechnen.

Nach Newcomb ist:

	Größter Wert	Kleinster Wert	Mittl. Wert
$\log\Delta_\odot$	0.00720,	9.99266,	0.00000,
$\pi_\mathbb{C}$	61′28.8″,	53′55.0″,	57′2.27″.

Hiermit erhält man die folgenden Zahlengrößen für die:

Dimensionen des Schattenkegels
(für innere Berührung).

Mondparallaxe	Sonnenentfernung	
	Größte $\log \Delta_\odot = 0.00720$	Kleinste $\log \Delta_\odot = 9.99266$
Größte 61′ 28.8″	$\log \sin f = 7.66041$	7.67499
	$h = 59.56$	57.60
	$\Delta_\mathbb{C} = 55.92$	55.92
	$h - \Delta_\mathbb{C} = +3.64$	$+1.68$
Kleinste 53′ 55.0″	$\log \sin f = 7.66055$	7.67514
	$h = 59.54$	57.58
	$\Delta_\mathbb{C} = 63.76$	63.76
	$h - \Delta_\mathbb{C} = -4.22$	-6.18
Mittlere 57′ 2.27″	$\Delta_\mathbb{C} = 60.27$	60.27

Man ersieht hieraus, daß die Mondparallaxe auf die Länge h des Schattenkegels nur unbedeutenden Einfluß hat, und daß die Schwankungen des Abstandes der Erde von der Sonne im wesentlichen diese Länge bedingen derart, daß bei größtem Sonnen- und kleinstem Mondabstand von der Erde die Maximallänge des Schattenkegels $h = 59.56$, bei kleinstem Sonnen- und größtem Mondabstand die Minimallänge $h = 57.58$ erreicht wird. Je nach den Abständen der Sonne und des Mondes von der Erde wird die Spitze des Schattenkegels die Erdoberfläche nicht erreichen, sie gerade treffen oder selbst weiter als dieselbe reichen, im günstigsten Fall noch 2,6 Erdradien hinter dem Antipodenpunkt des Schattenkreises.

Fällt die Spitze des Schattenkegels in die Erde hinein oder jenseits der Erdoberfläche, so wird auf der letzteren ein kleiner Schattenkreis bzw. eine Schattenellipse erzeugt, innerhalb derer diejenigen Erdörter liegen, für welche die Sonne zeitweise ganz vom Monde bedeckt ist. Diese Schattenfläche ist der Be-

reich der Totalität für einen gewissen Moment. Infolge des Fortschreitens des Schattenkegels im Raume und der Drehung der Erde von West nach Ost wird auch der Schatten von West gegen Ost über die Erdoberfläche hinwegstreichen und zwar mit einer Geschwindigkeit von rund 500^m pro Sekunde oder 30000^m pro Minute[1]).

Eine einfache Überlegung zeigt, daß der Radius ϱ des Schattenkreises, den der Schattenkegel bei innerer Berührung und bei zentrischer Stellung der drei Gestirne auf der Erdoberfläche erzeugt, annäherungsweise aus:

$$\varrho = k - (\Delta_{\mathbb{C}} - 1) \sin f = 0.2725 - (\Delta_{\mathbb{C}} - 1) \sin f$$

in Einheiten des Erdradius gefunden wird. Im günstigsten Fall, bei größtem Abstand der Sonne und kleinstem des Mondes von der Erde ($\log \sin f = 7.6604$, $\Delta_{\mathbb{C}} = 55.92$), ist $\varrho = 0.0212$ Erdradien $= 135^{km}$. Bei Nahestand der Sonne und kleinstem Mondabstand ($\log \sin f = 7.6750$, $\Delta_{\mathbb{C}} = 55.92$) ist der Radius des zentrischen Schattenkreises hingegen nur $\varrho = 81^{km}$. Die Zone, über welche der Schattenkreis bezw. die Schattenellipse infolge der kombinierten Bewegung des Schattenkegels und der Erddrehung über die Erdoberfläche hinwegstreicht, heißt die „Zone der Totalität". Sie besitzt also nur geringe Breite, und für einen in ihr liegenden Punkt wird die totale Finsternis beginnen, wenn der vorangehende Rand des Schattenkreises oder (wegen der schrägen Stellung der Kegelachse zur Erdoberfläche) der Schattenellipse den Punkt erreicht, und enden, wenn der folgende Rand darüber hinwegstreicht. Die totale Verfinsterung wird von größter Dauer für diejenigen Orte sein, über welche der Mittelpunkt des Schattenkegels hinwegzieht, die also in der Achse des Schattenkegels selbst

1) Die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Achse des Schattenkegels auf der Erdoberfläche wird annähernd aus $\Delta_{\mathbb{C}} \cdot (\mu_{\mathbb{C}} - \mu_{\odot})$ gefunden, worin $\Delta_{\mathbb{C}}$ die Mondentfernung in Kilometer, $\mu_{\mathbb{C}} - \mu_{\odot}$ die Differenz der mittl. Bewegung von Sonne und Mond pro Sekunde ist. Es ist $\mu_{\mathbb{C}} - \mu_{\odot} = 43887'' : 86400 = 0.508''$ in Bogen oder $246 \cdot 10^{-8}$ in Radius. Mit der mittl. Mondentfernung $384 \cdot 10^6$ Meter ergibt sich die Geschwindigkeit pro Sekunde gleich 945^m. Um diesen Betrag würde der Mondschatten von West gegen Ost pro Sekunde auf der Erdoberfläche vorrücken; da sich aber gleichzeitig die Erde im Äquator um 460^m pro Sekunde dreht, in der Breite Φ um $460 \cdot \cos \Phi$, so wird die Geschwindigkeit des Schattens $945 - 460 \cos \Phi$, daher in mäßigen Breiten, in denen $\cos \Phi$ nahe 1 ist, etwa 500^m pro Sekunde.

liegen; sie bestimmen die „Kurve der Zentralität der Finsternis". Mit dem oben berechneten größten Radius des Schattenkreises für zentrische Stellung $\varrho = 135^{km}$ und der mittleren Geschwindigkeit des Schattens von 30000^{m} pro Minute ergibt sich die größtmögliche Dauer der Totalität für einen Erdort $270000 : 30000 = 9$ Zeitminuten.[1])

Die Zone der Totalität ist auf beiden Seiten von Zonen begrenzt, in welchen diejenigen Erdorte liegen, von denen die Finsternis partiell beobachtet wird. Ihre Ausdehnung bestimmt sich durch den Schnitt des Halbschattenkegels, dessen Spitze zwischen Sonne und Mond liegt, mit der Erdoberfläche. Eine einfache Überlegung ergibt, daß der Radius des zentrischen Schattenkreises, den der Halbschattenkegel auf der Erdoberfläche erzeugt, aus:

$$\varrho' = k + (\Delta_{\mathbb{C}} - 1) \sin f' = 0.2725 + (\Delta_{\mathbb{C}} - 1) \sin f'$$

gefunden wird. Bei größtem Sonnenabstand und bei Mond in Erdnähe ($\log \sin f' = 7.66258$, $\Delta_{\mathbb{C}} = 55.92$) ist $\varrho' = 3345^{km}$, bei kleinstem Sonnenabstand und bei Mond in Erdnähe ($\log \sin f' = 7.67716$, $\Delta_{\mathbb{C}} = 55.92$) ist $\varrho' = 3400^{km}$.

Die durch den Halbschattenkreis bedingten beiden Zonen zu seiten der Totalitätszone besitzen also eine verhältnismäßig große Ausdehnung. Jeder Ort innerhalb derselben beobachtet eine partielle Sonnenfinsternis, die um so größer sein wird, je näher der Ort der Zone der Totalität liegt. Für Erdorte, welche außerhalb der zuletzt betrachteten Zonen liegen, findet überhaupt keine Finsternis statt.

Erreicht die Spitze des Kernschattens die Erde nicht, so wird an keinem Punkt der Erdoberfläche eine totale Finsternis beobachtet. Es gibt aber einen Bereich, dessen Radius bei zentrischer Stellung durch:

$$\varrho'' = (\Delta_{\mathbb{C}} - 1) \sin f - k$$

gegeben ist, in welchem die dunkle Mondscheibe sich so auf die Sonne projiziert, daß rings um den Mond ein Strahlenkranz sichtbar bleibt. In diesem Falle wird eine ringförmige Sonnenfinsternis beobachtet. Bei kleinstem Sonnenabstand und Mond in Erdferne ($\log \sin f = 7.67514$, $\Delta_{\mathbb{C}} = 63.76$) ist $\varrho'' = 156^{km}$.

1) Wenn die Schattenachse die Erde nicht zentral trifft, vergrößert sich die Zone der Totalität und die der partiellen Verfinsterung; in den Polargegenden erreichen sie ihre größte Breite.

Während die Durchschnitte des Halbschattenkegels mit der Erdkugel auf derselben die nördliche und südliche Sichtbarkeitsgrenze der Finsternis bestimmen, sind die Sichtbarkeitsgrenzen gegen West und Ost durch die Drehung der Erde und das gleichzeitige Fortschreiten des Schattenkegels im Raume bedingt. Der Schattenkegel des Mondes bewegt sich von West nach Ost, und eine Erzeugende des vorangehenden Teils des Kegelmantels berührt zunächst die Erde (Beginn der Finsternis überhaupt). Der Schattenkegel dringt jetzt in die Erde ein, wobei stets zwei Erzeugende des Kegelmantels mit der sich drehenden Erdkugel in Berührung kommen. Die Erdorte, an denen eine Berührung mit dem vorangehenden Teil des Schattenkegels stattfindet, beobachten den Beginn der Finsternis bei Sonnenaufgang. Während der Schattenkegel weiter streicht, hat sich auch die Erde von West nach Ost gedreht, und zwei Erzeugende des nachfolgenden Teils des Schattenkegels berühren jetzt die Erdkugel in weiter westlich gelegenen Punkten, von denen folglich das Ende der Finsternis bei Sonnenaufgang beobachtet wird.

Ähnlich verhält es sich mit der östlichen Sichtbarkeitsgrenze. Nachdem der Schatten sich über die Erdkugel hinwegbewegt hat, tritt er im Osten wieder heraus, und hierbei werden stets zwei Erzeugende des vorangehenden Teils des Schattenkegels die Erdkugel in Punkten berühren, in denen der Beginn der Finsternis bei Sonnenuntergang beobachtet wird. Der nachfolgende Teil des Schattenkegels hingegen berührt die Erdkugel in weiter westlich gelegenen Punkten, da sich die Erde inzwischen weiter gedreht hat. Diese Punkte beobachten also das Ende der Finsternis bei Sonnenuntergang, und unter diesen wird sich derjenige Punkt auszeichnen, in welchem die letzte Berührung des Schattenkegels mit der Erdkugel stattfindet (Ende der Finsternis überhaupt).

Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, daß der Sichtbarkeitsbereich einer Sonnenfinsternis, wenn der Halbschatten die Erde ganz trifft, durch folgende Kurvenzüge (Fig. 11) auf dem Erdglobus begrenzt wird: Im Norden durch die „Kurve des einfachen nördlichen Kontakts", im Süden durch die „Kurve des einfachen südlichen Kontakts" von Mond- und Sonnenscheibe; dazwischen liegt die nördliche und südliche „Grenzkurve der totalen Verfinsterung" und die „Kurve der zentralen Verfinsterung", d. h. die Linie, in welcher die

Achse des Schattenkegels die Erdoberfläche schneidet. In Westen und Osten wird der Sichtbarkeitsbereich durch „zwei Kurven von ovalförmiger Gestalt“ begrenzt, von deren Punkten Beginn und Ende der Finsternis bei Sonnenaufgang, beziehungsweise Beginn und Ende bei Sonnenuntergang beobachtet wird.

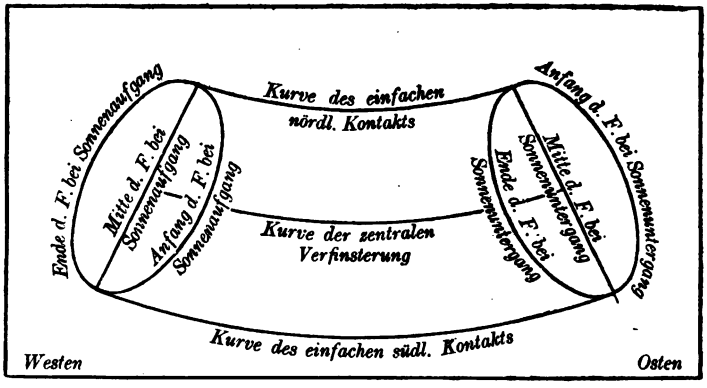


Fig. 11.

Trifft der Halbschatten die Erde nicht ganz, zieht er beispielsweise nördlich von der Erde vorüber, so degeneriert die Kurve des einfachen nördlichen Kontakts zu einem Punkt. Westliches und östliches Oval schließen sich dann im Norden zu einem Kurvenzug, der, wie Fig. 12 zeigt, die Form einer verbogenen Acht hat.

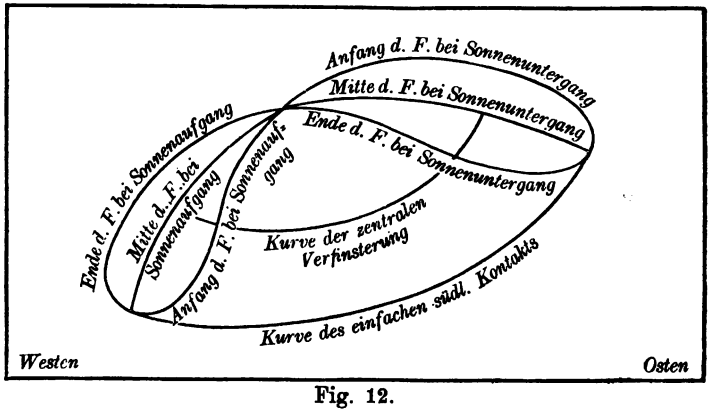


Fig. 12.

Aus diesen allgemeinen Betrachtungen ersieht man, daß die mathematische Behandlung der Sonnenfinsternisse gegenüber der Theorie der Mondfinsternisse sehr kompliziert ist und die Berechnung aller in Frage kommenden Grenzkurven einen verhältnismäßig großen Zeitaufwand erfordert.

Trotz dieser Schwierigkeiten hat die Theorie der Sonnenfinsternisse einen hohen Grad von Vollkommenheit erreicht dank dreier Methoden, welche Bessel, Wollhouse und Hansen bearbeitet haben. Die Methode von Wollhouse (Appendix zum Nautical Almanac für das Jahr 1836) ist dadurch ausgezeichnet, daß sie das Problem geometrisch behandelt, ein Weg, der für die Einführung in diesen schwierigen Gegenstand sachgemäßer erscheint als der analytische, den Bessel (Astronomische Untersuchungen, Bd. II) und Hansen (Abhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften IV) eingeschlagen haben. Die analytischen Methoden besitzen freilich der geometrischen gegenüber den Vorzug größerer Strenge. Die Finsternisberechnungen des Berliner Jahrbuchs sind auf Grund der Hansenschen, die des Nautical Almanac auf Grund der Besselschen Methode gewonnen. Bei beiden Methoden dient die Achse des Schattenkegels, also die Verbindungslinie von Mond und Sonne als Fundamentalrichtung (Z-Achse) und die dazu senkrecht durch den Mittelpunkt der Erde gelegte Ebene als Fundamentalebene. Während Bessel den Durchschnitt dieser Fundamentalebene mit dem Äquator als X-Achse gewählt hat, ist bei Hansen die Lage der X-Achse durch den Schnitt der Fundamentalebene mit der Ekliptik definiert. Hierin ist im wesentlichen der Unterschied beider Methoden begründet. Wir geben in dem folgenden die Besselsche Theorie in ihren Hauptpunkten wieder.

14. Bedingungen für das Zustandekommen einer Sonnenfinsternis.

Würde die Mondbahn mit der Ekliptik zusammenfallen, so würde bei jeder Konjunktion von Mond und Sonne, also bei jedem Neumond eine Sonnenfinsternis eintreten. Die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik macht aber diese Erscheinung seltener, so daß sie nur dann eintritt, wenn sich der Mond bei der Konjunktion mit der Sonne sehr nahe bei dem Knoten seiner Bahn befindet. Durch analoge Betrachtungen wie bei einer Mondfinsternis

läßt sich zeigen, daß eine Sonnenfinsternis nur stattfinden kann, wenn zur Zeit der Konjunktion in Länge die Mondbreite β der Ungleichheit:

$$\beta < H_{\mathfrak{C}} + H_{\odot} + \pi_{\mathfrak{C}} - \pi_{\odot}$$

Genüge tut. Denn man hat im Augenblick der Berührung der Erde mit dem Halbschattenkegel (Fig. 13):

$$\begin{aligned} \beta = MES &= MEC + CES \\ &= MEC + CEB + BES, \\ &= MEC + ACE - ABE + BES \\ &= H_{\mathfrak{C}} + \pi_{\mathfrak{C}} - \pi_{\odot} + H_{\odot}. \end{aligned}$$

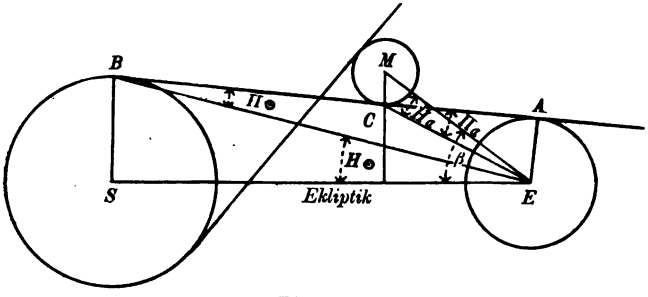


Fig. 13.

Setzt man für die rechtsstehenden Größen ihre Maximal- und Minimalwerte nach Newcomb (siehe Nr. 2), so folgt:

für das Maximum von β . . . . . $1^0 34' 20''$

für das Minimum von β . . . . . $1^0 24' 11''$.

Also je nachdem man im Moment der Konjunktion in Länge haben wird:

$$\beta < 1^0 24',$$

wird die Finsternis gewiß sein;

$$\beta > 1^0 24' \quad \text{und} \quad < 1^0 34',$$

wird die Finsternis zweifelhaft sein;

$$\beta > 1^0 34',$$

wird keine Finsternis stattfinden.

Am 19. August 1906 fand beispielsweise um 13^h eine Konjunktion des Mondes und der Sonne in Länge statt. Die zugehörige Mondbreite war $\beta = 1^0\,18'$, d. i. $< 1^0\,24'$. An diesem Tage mußte also zum mindesten eine partielle Sonnenfinsternis eintreten.

15. Die Fundamentalgleichungen der Besselschen Theorie der Sonnenfinsternisse.

In Nummer **13** haben wir die Dimensionen des Schattenkegels berechnet und wollen jetzt die Lage der Achse dieses Schattenkegels in bezug auf das äquatoriale System für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmen. Zu diesem Ende seien:

$\alpha_{\mathbb{C}}$, $\delta_{\mathbb{C}}$ die Rektaszension und Deklination des Mondes,

$\alpha_{\odot}$, $\delta_{\odot}$ die Rektaszension und Deklination der Sonne,

$\Delta_{\mathbb{C}}$, $\Delta_{\odot}$ die Entfernungen beider Gestirne vom Mittelpunkt der Erde,

G der Abstand von Mond und Sonne.

Denkt man sich durch den Erdmittelpunkt eine Parallele zu G gelegt, und sind a und d die Rektaszension und Deklination desjenigen Punktes, in welchem diese Parallele die Sphäre trifft, so hat man zur Bestimmung von G und der Koordinaten a und d des Schattenkegels die Gleichungen:

$$\begin{aligned} G\cos d\cos a &= \Delta_{\odot}\cos\delta_{\odot}\cos\alpha_{\odot} - \Delta_{\mathbb{C}}\cos\delta_{\mathbb{C}}\cos\alpha_{\mathbb{C}} \\ G\cos d\sin a &= \Delta_{\odot}\cos\delta_{\odot}\sin\alpha_{\odot} - \Delta_{\mathbb{C}}\cos\delta_{\mathbb{C}}\sin\alpha_{\mathbb{C}} \\ G\sin d &= \Delta_{\odot}\sin\delta_{\odot} - \Delta_{\mathbb{C}}\sin\delta_{\mathbb{C}}\,. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt, wenn die Rektaszensionen auf beiden Seiten von $\alpha_{\odot}$ aus gezählt werden:

$$\begin{aligned} G\cos d\cos(a-\alpha_{\odot}) &= \Delta_{\odot}\cos\delta_{\odot} - \Delta_{\mathbb{C}}\cos\delta_{\mathbb{C}}\cos(\alpha_{\mathbb{C}}-\alpha_{\odot}) \\ G\cos d\sin(a-\alpha_{\odot}) &= -\Delta_{\mathbb{C}}\cos\delta_{\mathbb{C}}\sin(\alpha_{\mathbb{C}}-\alpha_{\odot}) \end{aligned}$$

und durch Division:

$$(1)\qquad \operatorname{tg}(a-\alpha_{\odot}) = -\frac{\dfrac{\Delta_{\mathbb{C}}\cos\delta_{\mathbb{C}}}{\Delta_{\odot}\cos\delta_{\odot}}\cdot\sin(\alpha_{\mathbb{C}}-\alpha_{\odot})}{1-\dfrac{\Delta_{\mathbb{C}}\cos\delta_{\mathbb{C}}}{\Delta_{\odot}\cos\delta_{\odot}}\cdot\cos(\alpha_{\mathbb{C}}-\alpha_{\odot})}\,.$$

Zählt man dagegen in der ersten Gleichung auf beiden Seiten die Rektaszensionswinkel von a, die Deklinationswinkel von $\delta_\odot$ und in der dritten die Deklinationswinkel von $\delta_\odot$ aus, so hat man:

$$G\cos(d-\delta_\odot) = \Delta_\odot\cos(a-\alpha_\odot) - \Delta_\mathbb{C}\cos(\delta_\mathbb{C}-\delta_\odot)\cos(a-\alpha_\mathbb{C})$$
$$G\sin(d-\delta_\odot) = \qquad\qquad - \Delta_\mathbb{C}\sin(\delta_\mathbb{C}-\delta_\odot)$$

und durch Division:

$$(2)\qquad \operatorname{tg}(d-\delta_\odot) = -\frac{\dfrac{\Delta_\mathbb{C}}{\Delta_\odot\cos(a-\alpha_\odot)}\cdot\sin(\delta_\mathbb{C}-\delta_\odot)}{1-\dfrac{\Delta_\mathbb{C}\cos(a-\alpha_\mathbb{C})}{\Delta_\odot\cos(a-\alpha_\odot)}\cdot\cos(\delta_\mathbb{C}-\delta_\odot)}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Verlängerung der Verbindungslinie G von Sonne und Mond sehr nahe am Mittelpunkt der Erde vorübergeht, oder mit andern Worten, daß sich der Mond sehr nahe in Konjunktionsstellung mit der Sonne befindet, wie es bei einer Sonnenfinsternis in der Tat der Fall ist. Dann werden sämtliche Winkel $a-\alpha_\odot$, $d-\delta_\odot$, $\alpha_\mathbb{C}-\alpha_\odot$, $\delta_\mathbb{C}-\delta_\odot$ und $a-\alpha_\mathbb{C}$ sehr klein sein, so daß man ihre sin mit den Bogen vertauschen und ihre cos gleich 1 setzen kann. Die Gleichungen (1) und (2) und die für $G\cos(d-\delta_\odot)$ gehen dann über in:

$$a-\alpha_\odot = -\frac{\dfrac{\Delta_\mathbb{C}\cos\delta_\mathbb{C}}{\Delta_\odot\cos\delta_\odot}(\alpha_\mathbb{C}-\alpha_\odot)}{1-\dfrac{\Delta_\mathbb{C}\cos\delta_\mathbb{C}}{\Delta_\odot\cos\delta_\odot}}$$

$$d-\delta_\odot = -\frac{\dfrac{\Delta_\mathbb{C}}{\Delta_\odot}(\delta_\mathbb{C}-\delta_\odot)}{1-\dfrac{\Delta_\mathbb{C}}{\Delta_\odot}}$$

$$G = \Delta_\odot - \Delta_\mathbb{C} = \Delta_\odot\left(1-\frac{\Delta_\mathbb{C}}{\Delta_\odot}\right).$$

Ist $\pi_\mathbb{C}$ die Äquatorialhorizontalparallaxe des Mondes, $\pi_\odot$ die mittlere Parallaxe der Sonne, d. h. die Parallaxe, welche der Entfernung $\Delta_\odot = 1$ entspricht (die Konstante $8.80''$), und wird $\Delta_\odot$ in Einheiten der halben großen Achse der Erdbahn ausgedrückt,

so kann man für das Verhältnis der Mond- zur Sonnenentfernung setzen:

$$q = \frac{\sin \pi_\odot}{\Delta_\odot \sin \pi_\mathbb{(}}, \tag{3}$$

und die vorstehenden Formeln so schreiben:

$$\begin{cases} a - \alpha_\odot = -\dfrac{q \cos \delta_\mathbb{(} \sec \delta_\odot}{1 - q \cos \delta_\mathbb{(} \sec \delta_\odot} (\alpha_\mathbb{(} - \alpha_\odot) \\ d - \delta_\odot = -\dfrac{q}{1-q} (\delta_\mathbb{(} - \delta_\odot) \\ G = \Delta_\odot g, \text{ wenn } g = 1 - q. \end{cases} \tag{4}$$

In vielen Fällen kann man mit Vernachlässigung des Quadrates der sehr kleinen Größe q von den noch einfacheren Formeln:

$$\begin{cases} a - \alpha_\odot = -q \cos \delta_\mathbb{(} \sec \delta_\odot (\alpha_\mathbb{(} - \alpha_\odot) \\ d - \delta_\odot = -q (\delta_\mathbb{(} - \delta_\odot) \end{cases} \tag{4*}$$

Gebrauch machen. Durch die Gleichungen (4) werden die äqua-

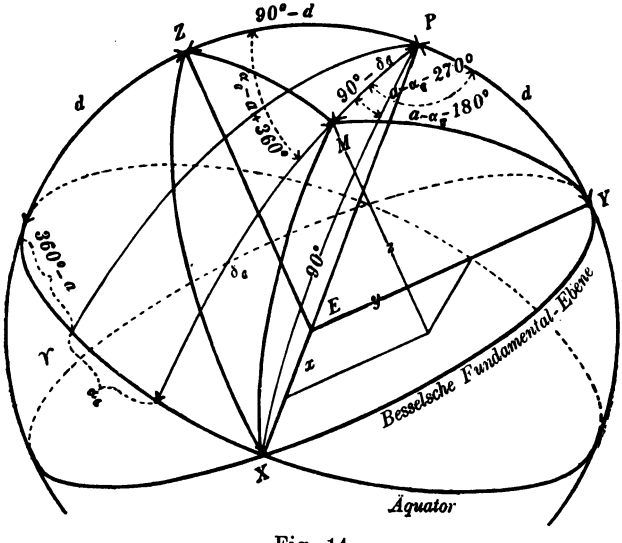


Fig. 14.

torialen Koordinaten a und d des Punktes, in welchem die Achse des Schattenkegels die Sphäre schneidet, und die Größe G bestimmt.

Wir denken uns nun nach dem Vorgange Bessels ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Fig. 14), dessen Anfangspunkt mit dem Erdmittelpunkt E zusammenfällt. Die Z-Achse dieses Systems sei parallel der Verbindungslinie von Mond und Sonne und weise nach der Öffnung des Schattenkegels hin. Die X-Achse sei als die Durchschnittslinie der XY-Ebene mit dem Äquator definiert; die Y-Achse liege rechtwinklig zu ihr, nördlich vom Äquator, im Sinne der wachsenden Rektaszensionen. Das Koordinatensystem ist also so gewählt, daß die Z-Achse nach demjenigen Punkt des Himmels zeigt, dessen Rektaszension a und dessen Deklination d ist, wie sie aus den Gleichungen (4) folgen (in der Figur ist a vom Widderpunkt aus nach Osten, also hinter der Sphäre herum zu denken).

Stellt M den Ort des Mondes an der Sphäre dar, und sind $\alpha_{\mathbb{C}}$, $\delta_{\mathbb{C}}$ die äquatorialen Koordinaten desselben, so hat man in den Dreiecken MXP, MYP und MZP:

$$\begin{aligned} MPX &= a - \alpha_{\mathbb{C}} - 270^0, & MP &= 90^0 - \delta_{\mathbb{C}}, & PX &= 90^0 \\ MPY &= a - \alpha_{\mathbb{C}} - 180^0 & & & PY &= d \\ MPZ &= 360^0 - (a - \alpha_{\mathbb{C}}) & & & PZ &= 90^0 - d \end{aligned}$$

und folglich nach dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned} \cos MX &= \cos \delta_{\mathbb{C}} \sin (\alpha_{\mathbb{C}} - a) \\ \cos MY &= \sin \delta_{\mathbb{C}} \cos d - \cos \delta_{\mathbb{C}} \sin d \cos (\alpha_{\mathbb{C}} - a) \\ \cos MZ &= \sin \delta_{\mathbb{C}} \sin d + \cos \delta_{\mathbb{C}} \cos d \cos (\alpha_{\mathbb{C}} - a). \end{aligned}$$

Da der Abstand des Mondes von der Erde in Einheiten des Äquatorialhalbmessers der Erde:

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \frac{1}{\sin \pi_{\mathbb{C}}} \tag{5}$$

ist, so werden die in eben dieser Einheit ausgedrückten rechtwinkligen Koordinaten des Mondes:

$$\begin{cases} x = \Delta_{\mathbb{C}} \cos \delta_{\mathbb{C}} \sin (\alpha_{\mathbb{C}} - a) \\ y = \Delta_{\mathbb{C}} [\sin \delta_{\mathbb{C}} \cos d - \cos \delta_{\mathbb{C}} \sin d \cos (\alpha_{\mathbb{C}} - a)] \\ z = \Delta_{\mathbb{C}} [\sin \delta_{\mathbb{C}} \sin d + \cos \delta_{\mathbb{C}} \cos d \cos (\alpha_{\mathbb{C}} - a)]. \end{cases} \tag{6}$$

Die Formeln lassen sich auf eine Form bringen, welche für die praktische Rechnung vorteilhafter ist. Mit:

$$\cos(\alpha_{\mathbb{C}} - a) = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a) \\ 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a) - 1 \end{cases}$$

hat man:

$$\cos MY = \sin(\delta_{\mathbb{C}} - d) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)\cos\delta_{\mathbb{C}}\sin d$$

oder:

$$\cos MY = \sin(\delta_{\mathbb{C}} + d) - 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)\cos\delta_{\mathbb{C}}\sin d.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit $\cos^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$, die zweite mit $\sin^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$ multipliziert und werden beide dann addiert, so resultiert:

$$\cos MY = \sin(\delta_{\mathbb{C}} - d)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a) + \sin(\delta_{\mathbb{C}} + d)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a).$$

Analog läßt sich $\cos MZ$ umformen, so daß man also das Gleichungssystem (6) durch das folgende ersetzen kann:

$$(6^*)\begin{cases} x = \Delta_{\mathbb{C}}\cos\delta_{\mathbb{C}}\sin(\alpha_{\mathbb{C}} - a) \\ y = \Delta_{\mathbb{C}}[\sin(\delta_{\mathbb{C}} - d)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a) + \sin(\delta_{\mathbb{C}} + d)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)] \\ z = \Delta_{\mathbb{C}}[\cos(\delta_{\mathbb{C}} - d)\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a) - \cos(\delta_{\mathbb{C}} + d)\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)], \end{cases}$$

das zur Bestimmung der rechtwinkligen Mondkoordinaten in unserem System dient.

Um die rechtwinkligen Koordinaten eines Beobachtungsortes, dessen Sternzeit Θ, dessen geozentrische Breite Φ' und dessen Erdradius ϱ ist, in bezug auf dasselbe Koordinatensystem zu erhalten, braucht man nur in den Formeln (6) die Mondkoordinaten mit denjenigen dieses Erdortes zu vertauschen, also $\Delta_{\mathbb{C}}$ mit ϱ, δ mit Φ' und $\alpha_{\mathbb{C}}$ mit Θ, und hat somit:

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi = \varrho\cos\Phi'\sin(\Theta - a) \\ \eta = \varrho\sin\Phi'\cos d - \varrho\cos\Phi'\sin d\cos(\Theta - a) \\ \zeta = \varrho\sin\Phi'\sin d + \varrho\cos\Phi'\cos d\cos(\Theta - a). \end{cases}$$

$\Theta - a$ ist der Stundenwinkel des Punktes Z in bezug auf den Meridian des Beobachtungsortes. Sind die Mond- und Sonnenkoordinaten, aus denen a und d berechnet worden sind, den Ephemeriden des ersten Meridians zur mittleren Zeit T entnommen,

und ist μ die dieser mittleren Zeit T des ersten Meridians entsprechende Sternzeit, ferner l die östliche Länge des Beobachtungsortes in bezug auf den ersten Meridian, so hat man (s. Fig. 16):

$$\Theta = \mu + l, \tag{8}$$

woraus Θ für irgendeine Epoche des ersten Meridians berechnet wird. Die Werte von ϱ, Φ' und l sind für die Hauptorte mit Sternwarten in den Jahrbüchern angegeben; andernfalls kann man die geographische Breite und Länge eines Beobachtungsortes aus einer guten Landkarte entnehmen und damit die reduzierten Erdkoordinaten ϱ und Φ' mit Hilfe der geodätischen Tafeln berechnen.

Wir greifen jetzt auf die Ergebnisse der Nummer **13** zurück und wollen den Radius berechnen, den der Durchschnittskreis des Halb- und Vollschattenkegels des Mondes mit der XY-Ebene unseres Systems oder mit einer zu derselben parallelen Ebene bildet. In dieser Nummer hatten wir für den halben Öffnungswinkel des Halb- und Vollschattenkegels die Formel gefunden:

$$\left.\begin{matrix}\sin f' \\ \sin f\end{matrix}\right\} = \frac{\sin H_\odot \pm k \sin \pi_\odot}{\Delta_\odot \cdot g}, \tag{9}$$

wo die rechts im Zähler auftretende Größe die „Finsterniskonstante" darstellt, deren Logarithmen entsprechend den Ausgangswerten des Berliner Jahrbuchs und des Nautical Almanac sind:

$$\log [\sin H_\odot + k \sin \pi_\odot] = 7.668759 \text{ (äußere Berührung)}$$
$$\log [\sin H_\odot - k \sin \pi_\odot] = 7.666593 \text{ (innere Berührung)}.$$

Wir fanden ferner für die Abstände der Spitzen des Halb- und Vollschattenkegels vom Mondmittelpunkt:

$$h' = \frac{k}{\sin f'} \quad \text{und} \quad h = \frac{k}{\sin f}.$$

Da nun z der Abstand des Mondes von der XY-Ebene ist und h' in Richtung der wachsenden z, h in Richtung der abnehmenden z liegt, so erhält man für die Abstände der beiden Spitzen von dieser Ebene:

$$c' = z + \frac{k}{\sin f'} \quad \text{und} \quad c = z - \frac{k}{\sin f}, \tag{10}$$

und für die Radien der Durchschnittskreise beider Schattenkegel mit dieser Ebene:

(11) $$l' = c' \operatorname{tg} f' \quad \text{und} \quad l = c \operatorname{tg} f$$

oder auch, wenn der Kürze wegen $\operatorname{tg} f' = i'$ und $\operatorname{tg} f = i$ gesetzt wird:

(11*) $$l' = i' c' \quad \text{und} \quad l = ic.$$

Unser Achsensystem ist so gewählt worden, daß die Z-Achse durch den Erdmittelpunkt läuft und parallel der Verbindungslinie von Mond und Sonne ist. Lassen wir die Z-Achse mit dieser Linie selbst zusammenfallen, so werden für den neuen, jetzt in der Z-Achse liegenden Anfangspunkt O (Figur 15) nunmehr

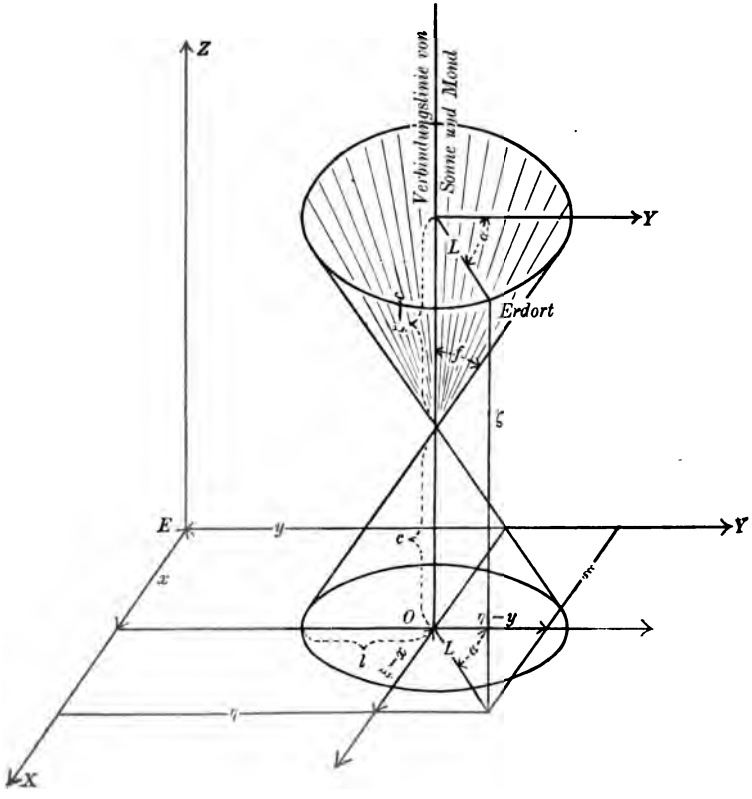


Fig. 15.

$-x$ und $-y$ die Koordinaten des Erdmittelpunktes sein, während die Koordinaten des Beobachtungsortes in bezug auf O durch $\xi - x$, $\eta - y$ und ζ dargestellt werden.

Soll nun dieser Beobachtungsort in der Umhüllungsfläche des Halb- bzw. Vollschattenkegels liegen, so müssen seine Koordinaten die Gleichung erfüllen:

$$[x - \xi]^2 + [y - \eta]^2 = [c' - \zeta]^2 \cdot i'^2$$
$$\text{oder} \quad = [c - \zeta]^2 \cdot i^2.$$

Da $[c' - \zeta]\, i' = i'c' - i'\zeta = l' - i'\zeta$ ist, läßt sich, wenn:

$$L' = l' - i'\zeta \quad \text{und} \quad L = l - i\zeta \tag{12}$$

gesetzt wird, auch schreiben:

$$[x - \xi]^2 + [y - \eta]^2 = L'^2$$
$$\text{oder} \quad = L^2, \tag{13}$$

worin L' und L die Radien der Durchschnittskreise des Halbschatten- und Vollschattenkegels mit der Ebene sind, die durch den Erdort parallel zur XY-Ebene gelegt ist.

Die Gleichung (13) ist die Grundgleichung der Theorie der Finsternisse; sie läßt sich durch die beiden Gleichungen ersetzen:

$$\begin{cases} [l - i\zeta] \sin\alpha = x - \xi \\ [l - i\zeta] \cos\alpha = y - \eta, \end{cases} \tag{13*}$$

worin α der Winkel ist, den der Radius L des durch den Erdort parallel zur XY-Ebene gelegten Schattenkreises mit der Y-Achse bildet (Fig. 15).

Zur weiteren Behandlung unseres Problems wollen wir annehmen, daß für eine der Mitte der Finsternis naheliegende Epoche T_0 — etwa für die der Konjunktionszeit zunächst liegende volle Stunde — die Sonnen- und Mondkoordinaten sowie Parallaxen den Ephemeriden irgend eines ersten Meridians entlehnt worden seien. Die hiermit berechneten rechtwinkligen Mondkoordinaten seien x_0, y_0, z_0, die des Beobachtungsortes ξ_0, η_0, ζ_0.

Ist dann $T = T_0 + \tau$ die Zeit des ersten Meridians, zu welcher für den Beobachtungsort äußere oder innere Berührung beider Gestirne (je nachdem der Rechnung L' oder L zugrunde liegt) stattfindet, so werden die zu T gehörigen Koordinaten des Mondes und Beobachtungsortes sein:

$$x = x_0 + x' \cdot \tau, \quad y = y_0 + y' \cdot \tau, \quad z = z_0 + z' \cdot \tau,$$
$$\xi = \xi_0 + \xi' \cdot \tau, \quad \eta = \eta_0 + \eta' \cdot \tau, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta' \cdot \tau,$$

wo die x', y', z' und ξ', η', ζ' die stündlichen Bewegungen in den Koordinaten darstellen und τ in Einheiten der Stunde ausgedrückt ist.

Diese stündlichen Bewegungen x', y', z' kann man direkt durch Differentiation der Gleichungen (6) finden. Zweckmäßiger ist es jedoch, dieselben durch numerische Differentiation abzuleiten. Denn da man die x, y für die ganze Dauer der Finsternis braucht, wird man sie auch für die der Epoche T_0 vorangehenden und nachfolgenden zwei vollen Stunden, also für $T_0 - 2^h$, $T_0 - 1^h$, T_0, $T_0 + 1^h$, $T_0 + 2^h$ berechnen müssen. Die dazu gehörigen x', y' werden dann mit Hilfe der bekannten Formel für numerische Differentiation:

$$\frac{df(T)}{dT} = f^I_{\frac{1}{2}}(T) - \frac{1}{6} f^{III}_{\frac{1}{2}}(T) + \frac{1}{30} f^V_{\frac{1}{2}}(T) \ldots$$

gefunden.

Was die stündlichen Änderungen ξ', η', ζ' betrifft, so hängen sie in erster Linie von der Drehung der Erde ab, sind also mit T oder mit der korrespondierenden Sternzeit Θ veränderlich, sodann auch mit der Rektaszension a der im Raume fortschreitenden Schattenkegelachse, während die Veränderung von d vernachlässigt werden kann. Man erhält aus (7) durch Differentiation:

$$\xi' = \varrho \cos \Phi' \cos(\Theta - a) \frac{d(\Theta - a)}{dT},$$

$$\eta' = \varrho \cos \Phi' \sin(\Theta - a) \sin d \frac{d(\Theta - a)}{dT} = \xi \sin d \frac{d(\Theta - a)}{dT},$$

$$\zeta' = -\varrho \cos \Phi' \sin(\Theta - a) \cos d \frac{d(\Theta - a)}{dT} = -\xi \cos d \frac{d(\Theta - a)}{dT}.$$

Hierin ist $\frac{d\Theta}{dT}$ die Änderung der Sternzeit in einer mittleren Stunde. Da an einem Sterntage ein Erdmeridian den Winkel $360^0 = 1296000''$ beschreibt, der mittl. Tag aber den Sterntag um $3^m 56.55^s = 236.55^s$ übertrifft, so werden an einem mittleren Tage $15 \cdot 236.55^s = 3548.3''$ mehr vom Ortsmeridian beschrieben als an einem Sterntage. Die stündliche Änderung von Θ ist demnach:

$$\frac{1299548.3''}{24} = 54147.8'',$$

und dies in Teilen des Radius ausgedrückt, d. i. mit sin 1″ multipliziert, gibt:

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{dT} = 0.26251 \text{ und } \log \Theta' = 9.41916.$$

Die stündliche Änderung von a ist zwar variabel, aber innerhalb so kleiner Grenzen, daß man dafür den Mittelwert $a' = 136''$ annehmen kann. Damit werden die stündlichen Änderungen der Ortskoordinaten:

$$(14) \qquad \begin{cases} \xi' = & [9.41807]\, \varrho \cos \Phi' \cos(\Theta - a), \\ \eta' = & [9.41807]\, \xi \sin d, \\ \zeta' = -& [9.41807]\, \xi \cos d, \end{cases}$$

wo die in Klammern stehende Zahl der Logarithmus ist.

Wir kehren jetzt zu den Gleichungen (13*) zurück, welche nunmehr die Gestalt annehmen (für innere Berührung):

$$(15) \qquad \begin{cases} L \sin \alpha = x_0 - \xi_0 + (x' - \xi') \cdot \tau, \\ L \cos \alpha = y_0 - \eta_0 + (y' - \eta') \cdot \tau \end{cases}$$

und eine entsprechende für die äußere Berührung beider Gestirne, wobei L' an die Stelle von L tritt.

Zur Auflösung der Gleichungen nach α und τ führt man zweckmäßig die Hilfsgrößen a, A, b, B mittels der Gleichungen:

$$(16) \qquad \begin{cases} a \sin A = x_0 - \xi_0, & b \sin B = x' - \xi', \\ a \cos A = y_0 - \eta_0, & b \cos B = y' - \eta' \end{cases}$$

ein. Es wird dann genau so wie in der Theorie der Mondfinsternisse:

$$L \sin \alpha = a \sin A + b \sin B\, \tau,$$
$$L \cos \alpha = a \cos A + b \cos B\, \tau$$

oder auch:

$$L \sin(\alpha - B) = a \sin(A - B),$$
$$L \cos(\alpha - B) = a \cos(A - B) + b\, \tau,$$

woraus die Bestimmungsgleichungen für α und τ:

$$(17)\qquad \begin{cases} \sin(\alpha - B) = \dfrac{a \sin(A - B)}{L}, \\ \tau = -\dfrac{a \cos(A - B)}{b} + \dfrac{L \cos(\alpha - B)}{b} \end{cases}$$

folgen. Bei der Auflösung der ersten dieser beiden Gleichungen ist die Regel zu befolgen, daß bei Aufsuchung des Winkels $\alpha - B$ für den Eintritt $\cos(\alpha - B)$ negativ, für den Austritt des Mondes aus der Sonnenscheibe dagegen positiv zu nehmen ist. Entspricht α' dem Eintritt, α'' dem Austritt, so hat man stets $(\alpha' - B) + (\alpha'' - B) = 180^0$. Mit α' erhält man dann τ' für den Eintritt, mit α'' das entsprechende τ'' für den Austritt. Da der Nordpol der Sphäre in der YZ-Ebene liegt (s. Fig. 14 u. 15), diese Ebene aber mit der Ebene des Deklinationskreises der Sonne zusammenfällt, so werden die so ermittelten Winkel α' und α'' zugleich die vom Mittelpunkt der Sonne in Richtung Norden-Osten gezählten Positionswinkel des Ein- und Austritts des Mondes sein.

Die vorstehenden Formeln werden uns in einer späteren Nummer zur Vorausberechnung der Phasen einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Erdort dienen. In der nächsten Nummer wird zunächst an einem praktischen Beispiel die Berechnung der sogenannten „Besselschen Elemente" einer Sonnenfinsternis gezeigt werden.

16. Die Besselschen Elemente der ringförmigen Sonnenfinsternis 1908 Juni 28.

Unter den Besselschen Elementen einer Sonnenfinsternis oder, besser ausgedrückt, „Besselschen Größen" versteht man die Koordinaten a und d des Punktes Z, berechnet nach den Formeln (3) und (4) der vorigen Nummer aus den äquatorialen Koordinaten und den Parallaxen von Sonne und Mond für die Stunden $T_0 - 2^h$, $T_0 - 1^h$, T_0, $T_0 + 1^h$, $T_0 + 2^h$, welche der der Konjunktionszeit von Sonne und Mond zunächstliegenden vollen Stunde T_0 vorangehen und folgen. Ferner versteht man darunter die für eben diese Zeiten nach den Formeln (6*) berechneten rechtwinkligen Mondkoordinaten x, y, z und ihre stündlichen Änderungen, sodann die Größen $\operatorname{tg} f'$, $\operatorname{tg} f$, l' und l, berechnet nach den Formeln (9) bis (11), und schließlich den Stundenwinkel $\mu - a$ des Deklinationskreises des Punktes Z gegen den Meridian der Ephemeride (den ersten Meridian) für die angegebenen Zeitmomente. Im Nautical Almanac sind diese Größen für jede Sonnenfinsternis mitgeteilt; sie bilden die Grundlagen

aller weiteren Berechnungen der Phasen und der Sichtbarkeitsgrenzen der Finsternis. Es soll daher ihre Berechnung an einem Beispiel gezeigt werden. Wir wählen dazu die ringförmige Sonnenfinsternis 1908 Juni 28 und entlehnen die Sonnen- und Mondkoordinaten sowie Parallaxen dem Nautical Almanac für 1908, legen also den Meridian von Greenwich als ersten Meridian zugrunde.

In der folgenden Tafel sind $\alpha_{\mathfrak{C}}$ und $\delta_{\mathfrak{C}}$ für die vollen Stunden direkt aus dem Nautical Almanac entnommen, während $\alpha_{\odot}$ und $\delta_{\odot}$ sowie $\pi_{\mathfrak{C}}$ und $\log \Delta_{\odot}$ für die Zwischenstunden durch Interpolation gewonnen sind. Die mittlere Sonnenparallaxe ist $\pi_{\odot} = 8.80''$.

1908 Juni 28 mittl. Zeit Greenw.	$\alpha_{\mathfrak{C}}$	Diff.	$\delta_{\mathfrak{C}}$	Diff.
2^h	$6^h 22^m 50.80^s$		$+ 23^0 21' 19{,}5''$	
		$+ 2^m 13.45^s$		$+ 1' 33.3''$
3	25 4.25		22 52.8	
		+ 2 13.43		+ 1 26.2
4	27 17.68		24 19.0	
		+ 2 13.40		+ 1 19.1
5	29 31.08		25 38.1	
		+ 2 13.37		+ 1 11.9
6	31 44.45		26 50.0	
		+ 2 13.33		+ 1 4.8
7	33 57.78		27 54.8	
		+ 2 13.29		+ 0 57.7
8	36 11.07		28 52.5	

1908 Juni 28 mittl. Zeit Greenw.	$\alpha_{\odot}$	Diff.	$\delta_{\odot}$	Diff.
2^h	$6^h 27^m 59.81^s$		$+ 23^0 17' 41.5''$	
		$+ 10.37^s$		$- 6.9''$
3	28 10.18		17 34.6	
		+ 10.37		− 7.0
4	28 20.55		17 27.6	
		+ 10.38		− 7.1
5	28 30.93		17 20.5	
		+ 10.37		− 7.1
6	28 41.30		17 13.4	
		+ 10.37		− 7.1
7	28 51.67		17 6.3	
		+ 10.37		− 7.1
8	29 2.04		16 59.2	

1908 Juni 28 mittl. Zeit Greenw.	$\pi_{(}$	Diff.	$\log \Delta_\odot$	
2^h	54′ 56.02″		0.0072041	
		− 0.95″		+ 4
3	55.07		72045	
		− 0.94		+ 5
4	54.13		72050	
		− 0.94		+ 4
5	53.19		72054	
		− 0.93		+ 4
6	52.26		72058	
		− 0.92		+ 5
7	51.34		72063	

Sternzeit im mittl. Mittag 1908 Juni 28: $\Theta_0 = 6^h 24^m 42.98^s$.

Um die Konjunktionszeit zu berechnen, bilden wir:

	$\alpha_{(} - \alpha_\odot$	Δ_1	Δ_2
3^h	$-3^m 5.93^s$		
		$+2^m 3.06^s$	
4	− 1 2.87		-0.04^s
		+ 2 3.02	
5	+ 1 0.15		− 0.02
		+ 2 3.00	
6	+ 3 3.15		

Sie liegt also zwischen 4^h und 5^h. Mit 4^h als Ausgangsepoche gibt dann die Formel:

$$t = \frac{-(\alpha_{(} - \alpha_\odot)}{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{2}\Delta_2 \cdot \frac{(\alpha_{(} - \alpha_\odot)}{\Delta_1}},$$

$\Delta_1 = 2^m 3.02^s$ $\quad \log[-(\alpha_{(} - \alpha_\odot)] = 1.79844$

$-\frac{1}{2}\Delta_2 = \frac{1}{2}\,0.04^s = +0.02$ $\quad \log \text{Nenner} = 2.09001$

$-\frac{1}{2}\Delta_2 \frac{(\alpha_{(} - \alpha_\odot)}{\Delta_1} = -0.01$ $\quad \log t = 9.70843$

Nenner $= 2\ 3.03$ $\quad t = 0^h.51101$

$= 30^m 39.6^s$

♂ von ⊙ und ☾ in AR ... Juni 28 $4^h 30^m 39.6^s$.

Wir nehmen als Ausgangsepoche $T_0 = 4^h$ und bestimmen die Besselschen Elemente nur für 3^h, 4^h und 5^h, um daran das Rechnungsschema zu zeigen:

	3^h	4^h	5^h
(Formel 3)			
$\log \sin \pi_{\mathbb{C}}$	8.203421	8.203297	8.203173
$\log \Delta_{\odot}$	0.0072	0.0072	0.0072
$\log \sin \pi_{\odot}$	5.6301	5.6301	5.6301
$\log \Delta_{\odot} \sin \pi_{\mathbb{C}}$	8.2106	8.2105	8.2104
$\log q$	7.4195	7.4196	7.4197
$\log 1 : 1 - q$	0.0011	0.0011	0.0011
(Formel 4)			
$\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_{\odot}$	$- 3^m 5.93^s$	$- 1^m 2.87^s$	$+ 1^m 0.15^s$
$\delta_{\mathbb{C}} - \delta_{\odot}$	$+ 5' 18.2''$	$+ 6' 51.4''$	$+ 8' 17.6''$
$\log (- q \cos \delta_{\mathbb{C}} \sec \delta_{\odot})$	7.4192_n	7.4192_n	7.4192_n
$\log (1 - q \cos \delta_{\mathbb{C}} \sec \delta_{\odot})$	9.9989	9.9989	9.9989
	7.4203_n	7.4203_n	7.4203_n
$\log (\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha_{\odot})$	2.2693_n	1.7984_n	1.7792
$\log [- q : 1 - q]$	7.4206_n	7.4207_n	7.4208_n
$\log (\delta_{\mathbb{C}} - \delta_{\odot})$	2.5027	2.6143	2.6969
$\log (a - \alpha_{\odot})$	9.6896	9.2187	9.1995_n
$\log (d - \delta_{\odot})$	9.9233_n	0.0350_n	0.1177_n
$a - \alpha_{\odot}$	0.49^s	0.16^s	$- 0.16^s$
$d - \delta_{\odot}$	$- 0.84''$	$- 1.08''$	$- 1.31''$
a	$6^h 28^m 10.67^s$	$6^h 28^m 20.71^s$	$6^h 28^m 30.77^s$
d	$23^0 17' 33.8''$	$23^0 17' 26.5''$	$23^0 17' 19.2''$

	3^h	4^h	5^h
$\log \sin d$	9.597069	9.597033	9.596997
$\log \cos d$	9.963078	9.963084	9.963091
(Formel 6*)			
$\alpha_{\mathbb{C}} - a$	$-3^m 6.42^s$	$-1^m 3.03^s$	$1^m 0.31^s$
	$-0^\circ 46' 36.30''$	$-0^\circ 15' 45.45''$	$0^\circ 15' 4.65''$
$\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	$-0\ 23\ 18.15$	$-0\ 7\ 52.72$	$0\ 7\ 32.32$
$\delta_{\mathbb{C}} - d$	5 19.0	6 52.5	8 18.9
$\delta_{\mathbb{C}} + d$	46 40 26.6	46 41 45.5	46 42 57.3
$\log \Delta_{\mathbb{C}}$	1.796579	1.796703	1.796827
$\log \cos \delta_{\mathbb{C}}$	9.962787	9.962709	9.962638
$\log \sin (\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	8.132145_n	7.661212_n	7.642054
$\log x$	9.891511_n	9.420624_n	9.401519
x	-0.77895	-0.26345	$+0.25207$
$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	7.831125_n	7.360178_n	7.341020
$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	9.999990	9.999999	9.999999
$\log \sin (\delta_{\mathbb{C}} - d)$	7.189365	7.300999	7.383588
$\log \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	9.999980	9.999998	9.999998
$\log \cos (\delta_{\mathbb{C}} - d)$	9.999999	9.999999	9.999999
$\log \sin (\delta_{\mathbb{C}} + d)$	9.861810	9.861967	9.862110
$\log \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	5.662250	4.720356	4.682040
$\log \cos (\delta_{\mathbb{C}} + d)$	9.836417	9.836241	9.836081
$\log \sin (\delta_{\mathbb{C}} - d) \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	7.189345	7.300997	7.383586
$\log \Delta_{\mathbb{C}}$	1.796579	1.796703	1.796827
$\log \sin (\delta_{\mathbb{C}} + d) \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - a)$	5.524060	4.582323	4.544150
$\log$ I [1]	8.985924	9.097700	9.180413
$\log$ II	7.320639	6.379026	6.340977

1) Siehe Anmerkung 1) auf Seite 71.

	3^h	4^h	5^h
I	0.09681	0.12523	0.15150
II	0.00209	0.00024	0.00022
y	0.09890	0.12547	0.15172
$\log\cos(\delta_{\mathbb{C}}-d)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}}-a)$	9.999979	9.999997	9.999997
$\log\Delta$	1.796579	1.796703	1.796827
$\log\cos(\delta_{\mathbb{C}}+d)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}}-a)$	5.498667	4.556597	4.518121
log III [1]	1.796558	1.796700	1.796824
log IV	7.295246_n	6.353300_n	6.314948_n
III	62.5976	62.6181	62.6360
IV	—0.0020	—0.0002	—0.0002
z	62.5956	62.6179	62.6358

Es folgt jetzt die Berechnung des Stundenwinkels des Deklinationskreises des Punktes Z gegen den Meridian von Greenwich $\mu_1 = \mu - a$, wo μ die der mittleren Zeit T des ersten Meridians entsprechende Sternzeit ist:

T	$3^h\ 0^m\ 0^s$	$4^h\ 0^m\ 0^s$	$5^h\ 0^m\ 0^s$
Θ_0 (Sternz. i. mittl. M.)	6 24 42.98	6 24 42.98	6 24 42.98
Redukt.	29.57	39.43	49.28
μ	9 25 12.55	10 25 22.41	11 25 32.26
a	6 28 10.67	6 28 20.71	6 28 30.77
μ_1	2 57 1.88	3 57 1.70	4 57 1.49
μ_1 in Bogen	44°15′ 28.20″	59°15′ 25.50″	74°15′ 22.35″

1) Mit der abgekürzten Bezeichnung:
$\mathrm{I} = \Delta_{\mathbb{C}}\sin(\delta_{\mathbb{C}}-d)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}}-a)$, $\mathrm{III} = \Delta_{\mathbb{C}}\cos(\delta_{\mathbb{C}}-d)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}}-a)$,
$\mathrm{II} = \Delta_{\mathbb{C}}\sin(\delta_{\mathbb{C}}+d)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}}-a)$, $\mathrm{IV} = -\Delta_{\mathbb{C}}\cos(\delta_{\mathbb{C}}+d)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}}-a)$.
Zur Prüfung der x, y, z dient die Kontrollformel $x^2+y^2+z^2=\Delta_{\mathbb{C}}^2$.

Bei der jetzt folgenden Berechnung von $i' = \operatorname{tg} f'$, $i = \operatorname{tg} f$, c', c, l' und l nach den Formeln (9) bis (11*) werden die Finsterniskonstanten:

$$\log [\sin H_\odot + k \sin \pi_\odot] = 7.66876 \text{ (äußere Berührung)},$$
$$\log [\sin H_\odot - k \sin \pi_\odot] = 7.66659 \text{ (innere Berührung)}$$

zugrunde gelegt.

$\log [\sin H_\odot + k \sin \pi_\odot]$	7.66876	7.66876	7.66876
$\log \Delta_\odot \cdot g$	606	606	606
$\log \sin f'$	7.66270	7.66270	7.66270
$\log [\sin H_\odot - k \sin \pi_\odot]$	7.66659	7.66659	7.66659
$\log \Delta_\odot \cdot g$	606	606	606
$\log \sin f$	7.66053	7.66053	7.66053
$k : \sin f'$	59.190	59.190	59.190
z	62.596	62.618	62.636
$k : \sin f$	59.487	59.487	59.487
c'	121.786	121.808	121.826
c	3.109	3.131	3.149
$\log c'$	2.08560	2.08568	2.08574
$\log i'$	7.66270	7.66270	7.66270
$\log l'$	9.74830	9.74838	9.74844
$\log c$	0.49262	0.49568	0.49817
$\log i$	7.66053	7.66053	7.66053
$\log l$	8.15315	8.15621	8.15870
l' (äußere Berührung)	0.56015	0.56025	0.56033
l (innere Berührung)	0.01423	0.01433	0.01441

Da im vorliegenden Fall c positiv und größer 1 ist, erreicht die Spitze des Vollschattenkegels die Erde nicht. Die Finsternis ist also eine ringförmige.[1])

Wird nach vorstehendem Schema die Rechnung auch für 2^h, 6^h und 7^h ausgeführt, und werden dann die stündlichen Bewegungen x' und y' aus den x und y mit Hilfe der Formel:

$$\frac{df(T)}{dT} = f^{I}_{\frac{1}{2}}(T) - \tfrac{1}{6} f^{III}_{\frac{1}{2}}(T) \ldots$$

abgeleitet, so ergibt sich die folgende Tabelle der

Besselschen Elemente der Sonnenfinsternis 1908 Juni 28.

T	x	y	x'	y'
2^h	− 1.29440	+ 0.07209	+ 0.51540	+ 0.02698
3	− 0.77895	+ 0.09890	+ 0.51547	+ 0.02668
4	− 0.26345	+ 0.12547	+ 0.51551	+ 0.02640
5	+ 0.25207	+ 0.15172	+ 0.51551	+ 0.02606
6	+ 0.76757	+ 0.17759	+ 0.51548	+ 0.02575
7	+ 1.28304	+ 0.20322	+ 0.51545	+ 0.02545
T	log tg f'	log tg f	l'	l
2^h	7.66270	7.66053	+ 0.56002	+ 0.01410
3	7.66270	7.66053	+ 0.56015	+ 0.01423
4	7.66270	7.66053	+ 0.56025	+ 0.01433
5	7.66269	7.66052	+ 0.56033	+ 0.01441
6	7.66269	7.66052	+ 0.56039	+ 0.01446
7	7.66269	7.66052	+ 0.56043	+ 0.01450
T	log sin d	log cos d	$\mu_1 = \mu - a$	a
2^h	9.59710	9.96307	29° 15.5′	97° 0′ 9″
3	9.59707	9.96308	44 15.5	97 2 40
4	9.59703	9.96308	59 15.4	97 5 11
5	9.59700	9.96309	74 15.4	97 7 42
6	9.59696	9.96310	89 15.3	97 10 12
7	9.59693	9.96310	104 15.3	97 12 43

1) Für eine totale Finsternis wird c und folglich auch l negativ.

17. Berechnung der Phasen einer Sonnenfinsternis.

A. Anfang und Ende der Finsternis überhaupt.

Anfang und Ende der Finsternis überhaupt werden definiert als diejenigen Zeitmomente, in denen die erste und letzte Berührung des Halbschattenkegels (l') mit der Erde stattfindet. In der Figur 16 ist diese Berührung zur Darstellung gebracht,

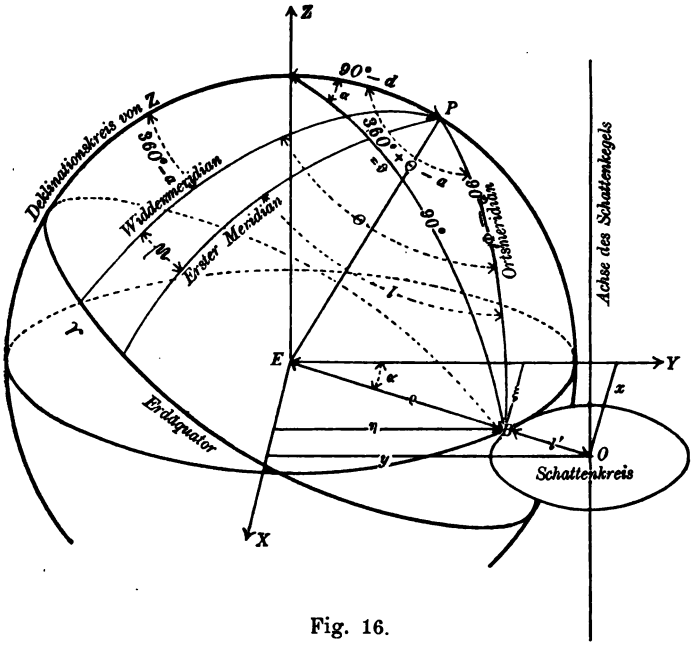


Fig. 16.

und zwar stellt die Kugel hier nicht die Himmelssphäre, sondern den Erdglobus dar. Da die Seiten des Halbschattenkegels wegen der Kleinheit von f' als parallel mit der Achse des Kegels betrachtet werden können, so findet die Berührung in der XY-Ebene statt. Ist ϱ der Radius des Erdortes B bei der Berührung mit dem Kreise vom Radius l', den der Durchschnitt des Halbschattenkegels mit der XY-Ebene bildet, ist ferner α der Winkel zwischen

ϱ und der Y-Achse, so sind die Koordinaten des Mittelpunktes O des Halbschattenkreises:

$$x = (\varrho + l') \sin \alpha, \qquad y = (\varrho + l') \cos \alpha,$$

und die Koordinaten des Berührungspunktes B der Erde:

$$\xi = \varrho \sin \alpha, \qquad \eta = \varrho \cos \alpha, \qquad \zeta = 0.$$

Gehören die mit dem Index 0 versehenen Größen einer Ausgangsepoche T_0 an, für welche die der Konjunktionszeit von Sonne und Mond zunächst liegende volle Stunde zweckmäßig gewählt wird, und ist $T_0 + \tau$ die Zeit der Berührung, so hat man andererseits für die Koordinaten des Schattenmittelpunktes in diesem Zeitmoment:

$$x = x_0 + x_0' \cdot \tau, \qquad y = y_0 + y_0' \cdot \tau$$

oder, wenn gesetzt wird[1]):

$$(1) \qquad \begin{cases} a_0 \sin A_0 = x_0, & b \sin B = x_0' \\ a_0 \cos A_0 = y_0, & b \cos B = y_0', \end{cases}$$

(a_0 und b stets positiv)

die Gleichungen:

$$(\varrho + l') \sin \alpha = a_0 \sin A_0 + b \sin B \, \tau$$
$$(\varrho + l') \cos \alpha = a_0 \cos A_0 + b \cos B \, \tau,$$

woraus in bekannter Weise folgt:

$$(2) \qquad \sin (\alpha - B) = \frac{a_0 \sin (A_0 - B)}{\varrho + l'}$$

und:

$$(3) \qquad \tau = -\frac{a_0 \cos (A_0 - B)}{b} + \frac{(\varrho + l') \cos (\alpha - B)}{b}.$$

Gleichung (2) gibt die beiden Winkel α' und α'' für Anfang und Ende, wobei für den Anfang der Phase $\cos (\alpha - B)$ negativ, für das Ende $\cos (\alpha - B)$ positiv zu nehmen ist. Entsprechend hat man aus (3) τ' für Anfang und τ'' für Ende.

1) a_0 bedeutet hier eine Distanz. Eine Verwechselung mit der Rektaszension des Punktes Z, für welche derselbe Buchstabe gebraucht wurde, dürfte nicht zu befürchten sein.

Bezeichnen wir (Fig. 16) den Stundenwinkel des Punktes Z in bezug auf den Ortsmeridian der Berührung mit ϑ, setzen also:

$$\vartheta = \Theta - a,$$

so ergeben die Gleichungen (7) der Nummer 15 in Verbindung mit den vorstehenden Berührungsbedingungen:

$$\begin{aligned} \varrho \sin \alpha &= \varrho \cos \Phi' \sin \vartheta \\ \varrho \cos \alpha &= \varrho \sin \Phi' \cos d - \varrho \cos \Phi' \sin d \cos \vartheta \\ 0 &= \varrho \sin \Phi' \sin d + \varrho \cos \Phi' \cos d \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Wird die zweite dieser Gleichungen mit $\sin d$, die dritte mit $\cos d$ multipliziert und beide subtrahiert, dann die zweite mit $\cos d$, die dritte mit $\sin d$ multipliziert und addiert, so erhält man das einfache System:

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos \Phi' \sin \vartheta = & \sin \alpha \\ \cos \Phi' \cos \vartheta = & -\cos \alpha \sin d \\ \sin \Phi' = & \cos \alpha \cos d, \end{cases}$$

woraus die Koordinaten Φ' und ϑ des Berührungspunktes auf der Erdoberfläche bestimmt werden, und zwar mit α' für den Anfang und mit α'' für das Ende.

Ist μ die der mittl. Zeit T des ersten Meridians entsprechende Sternzeit, so hat man für die östliche Länge des Berührungspunktes:

$$(5) \qquad l = \Theta - \mu = \vartheta - (\mu - a),$$

wobei $\mu_1 = \mu - a$ aus der Tafel der Besselschen Elemente zu entnehmen ist, und zwar für die beiden Zeiten T des Anfangs und Endes.

Die Gleichungen (4) können unmittelbar aus dem sphärischen Dreieck ZPB der Figur 16 gewonnen werden. Es ist dies das Fundamentaldreieck für die Bestimmung der Ortskoordinaten in der Besselschen Sonnenfinsternistheorie.

Zur Gleichung (2) ist zu bemerken, daß bei Berücksichtigung der Abplattung der Erde ϱ unbekannt ist und erst ermittelt werden kann, wenn Φ' durch eine erste Näherung gefunden ist. Es wird indes für eine erste Näherung stets genügen, die Abplattung zu vernachlässigen, also den Ortsradius $\varrho = 1$ zu setzen.

Bei der zweiten Näherung, die mit den für Anfang und Ende berechneten veränderlichen Größen getrennt durchzuführen ist, kann dann auch die Erdabplattung Berücksichtigung finden.[1])

Wir wollen jetzt Anfang und Ende überhaupt für die ringförmige Sonnenfinsternis 1908 Juni 28 berechnen. Als Ausgangsepoche wählen wir $T_0 = 4^h$, für welche man aus der Tabelle in der vorigen Nummer die folgenden Elemente entnimmt:

$$x_0 = -0.26345 \qquad y_0 = +0.12547$$
$$x_0' = +0.51551 \qquad y_0' = +0.02640$$
$$l' = +0.56025.$$

Damit hat man (Formel 1):

$$\log a_0 \sin A_0 = 9.42070_n \qquad \log b \sin B = 9.71224$$
$$\log a_0 \cos A_0 = 9.09854 \qquad \log b \cos B = 8.42160$$
$$\log \operatorname{tg} A_0 = 0.32216_n \qquad \log \operatorname{tg} B = 1.29064$$
$$A_0 = 295^0 28.0' \qquad B = 87^0 4.1'$$

$$\log a_0 \sin A_0 = 9.42070_n \qquad \log b \sin B = 9.71224$$
$$\log \sin A_0 = 9.95561_n \qquad \log \sin B = 9.99943$$
$$\log a_0 = 9.46509 \qquad \log b = 9.71281$$
$$A_0 - B = 208^0 23.9'$$

(Formel 2):

$$\log a_0 = 9.46509$$
$$\log \sin (A_0 - B) = 9.67724_n$$
$$\log a_0 \sin (A_0 - B) = 9.14233_n \qquad \alpha' - B = 185^0\ 6.2'$$
$$\log (1 + l') = 0.19319 \qquad \alpha'' - B = 354^0 53.8'$$
$$\log \sin (\alpha - B) = 8.94914_n$$

1) Bessel hat ein Verfahren angegeben, durch welches schon bei der ersten Näherung die Erdabplattung berücksichtigt werden kann. Da die Formeln dadurch aber wesentlich komplizierter werden, sehen wir in unserer Darstellung davon ab.

(Formel 3):

$\log a_0 = 9.46509$ $\qquad \log \frac{1+l'}{b} = 0.48038$

$\log \cos (A_0 - B) = 9.94432_n$ $\qquad \log \cos (\alpha - B) = \mp 9.99828$

$\log a_0 \cos (A_0 - B) = 9.40941_n$ $\qquad \log \frac{(1+l')\cos(\alpha - B)}{b} = \mp 0.47866$

$\log b = 9.71281$

$\log \frac{a_0 \cos (A_0 - B)}{b} = 9.69660_n$ $\qquad \frac{(1+l')\cos(\alpha-B)}{b} = \mp 3.0106$

$-\frac{a_0 \cos (A_0 - B)}{b} = 0.4973$

1908 Juni 28	$T_0 =$	4.0000^h	$T_0 = 4.0000^h$
	$\tau' =$	-2.5133	$\tau'' = 3.5079$
Anfang	$T =$	1.4867	Ende $T = 7.5079$
	$=$	$1^h 29.2^m$	$= 7^h 30.5^m$

mittl. Zeit Greenwich.

(Formel 4):

	Anfang:	Ende:
$\log \sin d =$	9.59712	9.59691
$\log \cos d =$	9.96307	9.96311
	(aus der Tabelle)	(aus der Tabelle)
$\alpha =$	$272^0 10.3'$	$81^0 57.9'$
$\log \sin \alpha =$	9.99969_n	9.99572
$\log \cos \alpha =$	8.57857	9.14544
$\log \cos \Phi' \sin \vartheta =$	9.99969_n	9.99572
$\log \cos \Phi' \cos \vartheta =$	8.17569_n	8.74235_n
$\log \operatorname{tg} \vartheta =$	1.82400	1.25337_n
$\vartheta =$	$269^0 8.4'$	$93^0 11.6'$
$\log \cos \Phi' \sin \vartheta =$	9.99969_n	9.99572
$\log \sin \vartheta =$	9.99995_n	9.99932
$\log \cos \Phi' =$	9.99974	9.99640
$\log \sin \Phi' =$	8.54164	9.10855
$\log \cos \Phi' =$	9.99974	9.99640
$\log \operatorname{tg} \Phi' =$	8.54190	9.11215
$\Phi' =$	$1^0 59.7'$	$7^0 22.6'$

(Formel 5):

$T' =$	$1^h 29.2^m$	$7^h 30.5^m$
Θ_0 (Sternz. i. M.) =	6 24.7	6 24.7
Redukt.	0.2	1.2
$\mu =$	7 54.1	13 56.4
$=$	$118^0 31.5'$	$209^0 6.0'$
$a =$	$96^0 58.6$	97 14.0
$\vartheta =$	$269^0 8.4$	$93^0 11.6'$
$-(\mu - a) =$	-21 32.9	-111 52.0
$l =$	247 35.5 östl.	341 19.6 östl.
$=$	112 24.5 westl.	18 40.4 westl.
	v. Greenwich.	v. Greenwich.

Diese erste Näherung gibt die Zeiten und Positionen für den Zweck der Orientierung genügend genau. Man vergleiche hiermit die Karte (Fig. 18) des Nautical Almanac, auf welcher mit „first contact" die Position des Anfangs und mit „last contact" die Position des Endes der allgemeinen Finsternis gekennzeichnet ist. Will man strenge Werte haben, so ist eine zweite Näherung (getrennt für Anfang und Ende, mit den für diese Zeiten gültigen Besselschen Größen) durchzuführen, wobei dann auch auf die Erdabplattung, d. h. auf ϱ Rücksicht zu nehmen ist unter Benutzung der Formel:

$$\log \varrho = 9.999275 + 0.000727 \cos 2\Phi' - \cdots$$

Die sich definitiv ergebende geozentrische Breite Φ' ist dann schließlich mit Hilfe der Formel:

$$\Phi = \Phi' + 11'30.65'' \sin 2\Phi' - 1.16'' \sin 4\Phi' + \cdots$$

in die geographische Breite Φ umzuwandeln, oder, wenn Reduktionstafeln zur Verfügung stehen, ist $\Phi - \Phi'$ mit dem Argument Φ' daraus zu entnehmen. Man hat:

$\Phi' = +\ 1^0\ 59.7'$	$\Phi' = +\ 7^0\ 22.6'$
Redukt. $= +$ 0.8	Redukt. $= +$ 3.0
Anfang $\Phi = +\ 2^0\ 0.5'$	Ende $\Phi = +\ 7^0\ 25.6'$

Also: Beginn der Finsternis überhaupt: 1908 Juni 28, $1^h 29.2^m$ mittl. Greenw. Zeit in Länge $112^0 25'$ westl. von Greenwich und Breite $2^0 0.5'$ nördl. Ende der Finsternis überhaupt: Juni 28, $7^h 30.5^m$ in Länge $18^0 40'$ westl. von Greenwich und Breite $7^0 26'$ nördlich. Da $\zeta = 0$ und die Zenitdistanz der Sonne $ZB = 90^0$ ist, beginnt und endigt die Finsternis bei Sonnenauf- und -untergang.

B. Anfang und Ende der totalen oder ringförmigen Finsternis überhaupt.

Anfang und Ende der totalen oder ringförmigen Finsternis überhaupt werden als diejenigen Zeitmomente definiert, in welchen die erste und letzte Berührung des Vollschattenkegels (also innere Berührung von Sonne und Mond) mit der Erdkugel stattfindet. Die Bedingungen hierfür und die Bestimmungsgleichungen sind dieselben wie in A, nur mit dem Unterschied, daß an die Stelle von l' in diesem Fall der Radius des Vollschattenkegels l zu setzen ist. Da sich die Zeiten und Positionen wegen der Kleinheit von l nur wenig von denjenigen der zentralen Finsternis unterscheiden (T Eintritt $2^h 33.0^m$, T Austritt $6^h 26.6^m$), werden im Nautical Almanac nur die letzteren angegeben.

C. Anfang und Ende der zentralen Finsternis überhaupt.

Anfang und Ende der zentralen Finsternis überhaupt (der zentralen Stellung von Sonne und Mond) werden als diejenigen Zeitmomente definiert, in welchen die erste und letzte Berührung der Achse des Schattenkegels mit der Erdkugel stattfindet. Die Bedingungen hierfür sind:

$$x = \xi = \varrho \sin \alpha, \qquad y = \eta = \varrho \cos \alpha, \qquad \zeta = 0.$$

Ist T_0 die Ausgangsepoche der Rechnung, $T_0 + \tau$ die Zeit der Berührung, so hat man, wenn in der ersten Näherung die Erdabplattung vernachlässigt, also $\varrho = 1$ gesetzt wird:

$$\sin \alpha = x = x_0 + x_0' \cdot \tau, \qquad \cos \alpha = y = y_0 + y_0' \cdot \tau,$$

und bei Einführung der bekannten Hilfsgrößen:

$$a_0 \sin A_0 = x_0, \qquad b \sin B = x_0'$$
$$a_0 \cos A_0 = y_0, \qquad b \cos B = y_0'$$

die Bestimmungsgleichungen für α und τ:

$$\sin \alpha = a_0 \sin A_0 + b \sin B\, \tau$$
$$\cos \alpha = a_0 \cos A_0 + b \cos B\, \tau,$$

deren Lösungen:

$$\sin (\alpha - B) = a_0 \sin (A_0 - B)$$
$$\tau = -\frac{a_0 \cos (A_0 - B)}{b} + \frac{\cos (\alpha - B)}{b}$$

($\cos (\alpha - B)$ negativ für Anfang, positiv für Ende)

sind. Die Positionen der beiden Örter, an denen die zentrale Finsternis zuerst und zuletzt von der Erde gesehen wird, ergeben sich aus:

$$\cos \Phi' \sin \vartheta = \sin \alpha$$
$$\cos \Phi' \cos \vartheta = -\cos \alpha \sin d$$
$$\sin \Phi' = \cos \alpha \cos d$$
$$\text{Östl. Länge } l = \vartheta - (\mu - a).$$

Hierin ist μ die Sternzeit, welche der mittl. Zeit $T_0 + \tau'$ bzw. $T_0 + \tau''$ für Anfang und Ende entspricht; d und $\mu - a$ sind für diese Zeiten der Tabelle der Besselschen Größen zu entnehmen.

Als praktisches Beispiel wählen wir wieder die Finsternis 1908 Juni 28. Für die Ausgangsepoche $T_0 = 4^h$ sind die Besselschen Größen bereits im vorigen Beispiel angegeben. Dort wurde gefunden:

$$A_0 = 295^0 28.0' \qquad B = 87^0 4.1'$$
$$\log a_0 = 9.46509 \qquad \log b = 9.71281$$
$$-\frac{a_0 \cos (A_0 - B)}{b} = 0.4973^h.$$

$$\log \sin (\alpha - B) = 9.14233_n \qquad \alpha' - B = 187^0 58.6'$$
$$\log \cos (\alpha - B) = \mp 9.99578 \qquad \alpha'' - B = 352\ \ 1.4$$
$$\log b = 9.71281$$
$$\log \frac{\cos (\alpha - B)}{b} = \mp 0.28297 \qquad \frac{\cos (\alpha - B)}{b} = \mp 1.9185$$

1908 Juni 28	$T_0 =$	4.0000^h		$T_0 =$	4.0000^h
	$\tau' =$	-1.4212		$\tau'' =$	$+2.4158$
Anfang d.	$T =$	2.5788	Ende d.	$T =$	6.4158
zentral. Finst.	$=$	$2^h 34.7^m$	zentr. Finst.	$=$	$6^h 24.9^m$

mittl. Zeit Greenwich.

	Anfang:	Ende:
$\log \sin d =$	9.59708	9.59695
$\log \cos d =$	9.96308	9.96310
	(aus der Tabelle)	aus der Tabelle)
$\alpha =$	$275^0 2.7'$	$79^0 5.5'$
$\log \sin \alpha =$	9.99831_n	9.99208
$\log \cos \alpha =$	8.94417	9.27701
$\log \cos \Phi' \sin \vartheta =$	9.99831_n	9.99208
$\log \cos \Phi' \cos \vartheta =$	8.54125_n	8.87396_n
$\log \operatorname{tg} \vartheta =$	1.45706	1.11812_n
$\vartheta =$	$268^0 0.0'$	$94^0 21.4'$
$\log \sin \Phi' =$	8.90725	9.24011
$\Phi' =$	$+ 4^0 38.0'$	$+ 10^0 0.6'$
Redukt. =	$+ 1.8$	$+ 3.9$
$\Phi =$	$+ 4\ 39.8'$	$+ 10\ 4.5'$
$\vartheta =$	$268^0\ 0.0'$	$94^0 21.4'$
$-(\mu - a) =$	$- 37\ 56.1$	$- 95\ 29.9$
l östlich =	$230\ 3.9$	$358\ 51.5$
l westlich =	$129\ 56.1$	$1\ 8.5$

Man vergleiche hiermit die betreffenden Positionen auf der Karte (Fig. 18) des Nautical Almanac.

D. Zentrale Finsternis im wahren Mittag.

Wenn die Finsternis im wahren Mittag stattfinden soll, muß der Beobachtungsort im Meridian der Sonne liegen. Da die Finsternis außerdem zentral sein soll, so hat man die Bedingungen:

$$x = \xi = 0, \quad y = \eta, \quad \eta^2 + \xi^2 = \varrho^2.$$

Die Zeit erhält man aus der Bedingung $x = 0$. Gehört x_0 und x_0' wieder zur Ausgangsepoche T_0, so hat man:

$$x = x_0 + x_0' \cdot \tau = 0, \quad \text{woraus } \tau = -\frac{x_0}{x_0'}.$$

$$T = T_0 + \tau.$$

Für diese Zeit sind y, d und $\mu - a$ aus der Tabelle der Besselschen Größen zu interpolieren. Setzen wir $y = \varrho \sin \beta$, so wird $\zeta = \varrho \cos \beta$, und die Gleichungen (7) in der Nummer **15** werden:

$$0 = \varrho \cos \Phi' \sin \vartheta$$
$$\varrho \sin \beta = \varrho \sin \Phi' \cos d - \varrho \cos \Phi' \sin d \cos \vartheta$$
$$\varrho \cos \beta = \varrho \sin \Phi' \sin d + \varrho \cos \Phi' \cos d \cos \vartheta.$$

Aus der ersten folgt $\vartheta = 0$ (Sonne und Erdort liegen in demselben Meridian), aus den beiden letzten, da $\cos \vartheta = 1$ ist:

$$\sin \beta = \sin (\Phi' - d), \qquad \cos \beta = \cos (\Phi' - d),$$

folglich:

$$\Phi' = \beta + d$$

zur Bestimmung von Φ'. Die westliche Länge wird:

$$l = \mu - a.$$

In der ersten Näherung ist $\varrho = 1$ zu setzen, also β aus $y = \sin \beta$ zu bestimmen.

Gehen wir in unserem Beispiel wieder von $T_0 = 4^h$ aus, so haben wir:

$$x_0 = -0.26345 \qquad x_0' = 0.51551 \qquad \tau = 0.5110^h$$
$$T = T_0 + \tau = 4^h + 0.5110^h = 4^h 30.7^m$$

als Zeit der zentralen Finsternis im wahren Mittag, die identisch ist mit der Konjunktionszeit von Sonne und Mond in Rektaszension (Nr. **16**). Hiermit wird aus der Tabelle erhalten:

$$y = 0.13890 \qquad \log \sin d = 9.59701 \qquad \mu - a = 66^0 55',$$

also:

$$\begin{array}{rl} \beta = & 7^0\,59.2' \\ d = & 23\ 17.4 \\ \hline \Phi' = & 31\ 16.6 \\ \text{Reduk.} = & +\ 10.2 \\ \hline \Phi = & 31\ 26.8 \end{array} \qquad l = 66^0 55' \text{ westlich.}$$

18. Berechnung der Grenzen des Sichtbarkeitsbereichs einer Sonnenfinsternis.

A. Westliche und östliche Grenzlinien.

Die westlichen und östlichen Grenzlinien, d. h. die Gesamtheit aller derjenigen Orte der Erdoberfläche, von denen Anfang und Ende der allgemeinen Finsternis bei Sonnenauf- und -untergang beobachtet wird, müssen die Bedingung erfüllen:

$$\zeta = 0.$$

Für eine gegebene Zeit T, die innerhalb noch näher zu bestimmender Grenzen liegt, müssen daher die Gleichungen (Nr. **15**, Formel 12 und 13):

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = l'^2 \quad \text{und} \quad \xi^2 + \eta^2 = \varrho^2$$

bei äußerer Berührung von Sonne und Mond erfüllt werden. Da x, y und l' für die gegebene Zeit aus der Tafel der Besselschen Elemente bekannt sind und ϱ in erster Näherung gleich 1 gesetzt werden kann, handelt es sich um die Bestimmung von α und der Ortskoordinaten ξ und η aus den vorstehenden Gleichungen. Setzt man:

$$\xi = \varrho \sin\alpha \quad \text{und} \quad \eta = \varrho\cos\alpha$$

und führt die Hilfsgrößen a und A ein:

$$x = a\sin A \quad \text{und} \quad y = a\cos A, \tag{1}$$

so handelt es sich um die Auflösung von:

$$[a\sin A - \varrho\sin\alpha]^2 + [a\cos A - \varrho\cos\alpha]^2 = l'^2$$

nach α, für welche:

$$\cos(A-\alpha) = \frac{a^2+\varrho^2-l'^2}{2a\varrho}$$

oder auch:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha) = \pm\sqrt{\frac{[l'+a-\varrho][l'-a+\varrho]}{4a\varrho}}$$

gefunden wird. Bei der ersten Näherung ist ϱ unbekannt; es genügt aber mit Vernachlässigung der Erdabplattung $\varrho = 1$ zu setzen, also den Winkel α aus:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha) = \pm\sqrt{\frac{[l'+a-1][l'-a+1]}{4a}} \tag{2}$$

zu bestimmen. Mit den so erhaltenen beiden Werten von α ergeben sich Φ' und ϑ aus den bekannten Formeln:

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos\Phi' \sin\vartheta = & \sin\alpha \\ \cos\Phi' \cos\vartheta = & -\cos\alpha \sin d \\ \sin\Phi' = & \cos\alpha \cos d \end{cases}$$

und die östliche Länge aus:

$$(4)\qquad l = \vartheta - (\mu - a),$$

wobei $\sin d$, $\cos d$ und $\mu - a$ für die gegebene Zeit T der Tafel der Besselschen Elemente zu entnehmen sind.

Beide Werte von α reduzieren sich auf einen, nämlich $\alpha = A$, wenn:

$$\sqrt{\frac{[l'+a-\varrho]\,[l'-a+\varrho]}{4a\varrho}} = 0$$

ist, d. h. wenn:

$$a = \varrho + l' \quad \text{und} \quad a = \varrho - l'$$

ist. Hieraus folgt, daß die Zeit T innerhalb des Zeitintervalls zwischen der äußeren und inneren Berührung des Halbschattenkegels mit dem Erdball liegen muß, oder daß eine Lösung der Gleichung (2) nur für das Zeitintervall möglich ist, in welchem der Schattenkreis vom Radius l' den Erdkreis in der XY-Ebene durchschneidet. Zur Erläuterung dieser Verhältnisse dient die Fig. 17, welche die beiden Schnittpunkte B' und B'' vom Schatten- und Erdkreis und die beiden dazu gehörigen Winkel α zeigt.

Es sollen jetzt die vorstehenden Formeln zur Berechnung eines Punktes der westlichen Grenzkurve der Finsternis 1908 Juni 28 benutzt werden. Die Zeit, in welcher die Finsternis bei Sonnenaufgang beobachtet wird, muß für die westliche Grenze zwischen:

$$T = 1^h 29^m \quad \text{und} \quad T = 3^h 41^m,$$

und bei Sonnenuntergang für die östliche Grenze zwischen:

$$T = 5^h 19^m \quad \text{und} \quad T = 7^h 30^m$$

liegen. Die beiden äußeren Werte von T sind bereits oben in Nr. 17 A berechnet worden und stellen Anfangs- und Endzeit der Finsternis überhaupt dar; die beiden inneren Werte ergeben sich

aus der Formel (2) in Nr. 17 A, wenn $1 - l'$ an die Stelle von $1 + l'$ gesetzt wird.

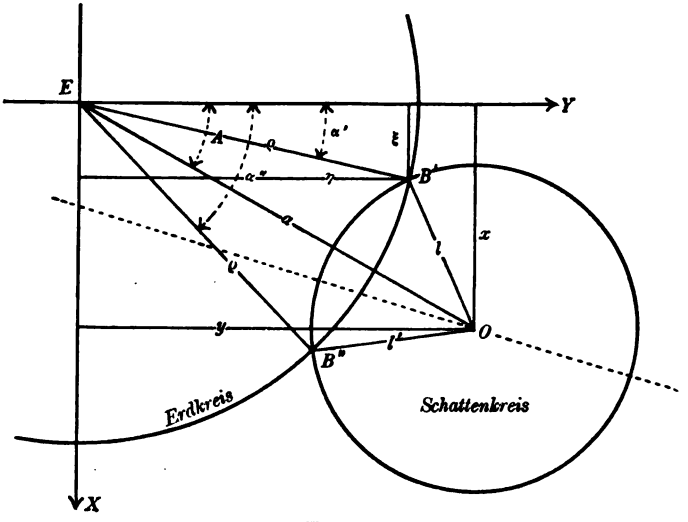


Fig. 17.

Es handle sich beispielsweise um die Bestimmung der Positionen der westlichen Grenzkurve, welche der Zeit:

$$T = 3^h$$

angehören. Für diese Epoche sind die aus der Besselschen Tafel entnommenen Elemente:

$x = -0.77895$	$y = +0.09890$
$\log \sin d = 9.59707$	$\log \cos d = 9.96308$
$l' = +0.56015$	$\mu - a = 44^0 15.5'$.

Hiermit wird:

(Formel 1):

$\log a \sin A = 9.89151_n$	$\log a \sin A = 9.89151_n$
$\log a \cos A = 8.99520$	$\log \sin A = 9.99653_n$
$\log \operatorname{tg} A = 0.89631_n$	$\log a = 9.89498$
$A = 277^0 14.1'$	

(Formel 2):

$\log [l' + a - 1] = 9.53826$ $\quad \log \sin \frac{1}{2}(A - \alpha) = 9.46525$

$\log [l' - a + 1] = 9.88928$ $\quad A - \alpha = \pm 33^0 56.6'$

$= 9.42754$ $\quad \alpha' = 243^0 17.5'$

$\log 4a = 0.49704$ $\quad \alpha'' = 311\ 10.7$

$\log \sin^2 \frac{1}{2}(A - \alpha) = 8.93050$

Mit diesen beiden Werten von α erhält man aus Formel (3) und (4) in bekannter Weise:

$\Phi' =$	$-24^0 23.0'$	$+37^0 13.0'$
$\vartheta =$	$281\ 15.3$	$250\ 55.1$
$\mu - a =$	$44\ 15.5$	$44\ 15.5$
l östl. $=$	$236\ 59.8$	$206\ 39.6$
l westl. $=$	$123\ 0.2$	$153\ 20.4$

Für beide Erdörter beginnt die Finsternis bei Sonnenaufgang.

Dadurch, daß man innerhalb der Grenzzeiten, etwa im Abstand von 10^m, die Berechnungen durchführt, erhält man eine hinreichende Anzahl von Positionen, um die westliche und östliche Grenzkurve auf der Karte (vgl. Fig. 18) oder dem Globus festlegen zu können.

B. Nördliche und südliche Grenzlinien.

Die Bestimmungsgleichung für die nördliche und südliche Grenzkurve ergibt sich aus der Überlegung, daß der einfache Kontakt von Sonne und Mond das Minimum der Verfinsterung für die Punkte dieser Kurven darstellt. Die Bestimmung dieser Punkte läuft daher auf eine Minimalaufgabe hinaus und ist deshalb verhältnismäßig verwickelt.

Ein Punkt ξ, η, ζ der Erdoberfläche, welcher zur Zeit T in der Oberfläche des Schattenkegels liegt, wird sich in dem nächstfolgenden Moment $T + dT$ außerhalb oder innerhalb dieser Oberfläche befinden, je nachdem das Quadrat seines Abstandes vom Nullpunkt:

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

zur Zeit $T + dT$ größer oder kleiner als das Quadrat des Radius

des Schattenkreises in der XY-Ebene, d. h. $(l - i\zeta)^2$ ist. Dies läßt sich so ausdrücken: der Differentialquotient:

$$\frac{d}{dT}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (l - i\zeta)^2]$$

wird negativ, wenn der Punkt ξ, η, ζ infolge der Eigenbewegung des Schattenkegels und der Erdumdrehung während des Zeitmomentes dT aus der Oberfläche in das Innere des Schattenkegels hineinrückt, positiv dagegen, wenn er aus der Oberfläche nach außen herausrückt.[1])

Nun suchen wir aber diejenigen Punkte ξ, η, ζ, welche während des ganzen Durchganges des Schattenkegels durch den Erdball stets auf der Oberfläche des Schattenkegels bleiben, also weder in den Schattenkegel hinein, noch aus ihm herausrücken. Die Gesamtheit dieser Punkte markiert die nördliche und südliche Grenzlinie der Finsternis und muß notwendig die Bedingungsgleichung erfüllen:

$$\frac{d}{dT}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (l - i\zeta)^2] = 0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (Nr. 15, 13*):

$$(l - i\zeta)\sin\alpha = x - \xi, \qquad (l - i\zeta)\cos\alpha = y - \eta,$$
$$\xi^2 + y^2 + \zeta^2 = 1,$$

welche ausdrücken, daß die Punkte ξ, η, ζ auf der Oberfläche des Schattenkegels selbst liegen, dienen zur Ermittlung der Unbekannten ξ, η, ζ und α für eine gegebene Zeit T.

Es handelt sich nun zunächst darum, den Differentialausdruck auf eine geeignete Form zu bringen. Führen wir die Differentiation aus, so wird:

$$(x-\xi)(x'-\xi') + (y-\eta)(y'-\eta') - (l - i\zeta)(l' - i\zeta') = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Fundamentalgleichung der Finsternis:

$$(x'-\xi')\sin\alpha + (y'-\eta')\cos\alpha - (l' - i\zeta') = 0.$$

1) In dieser Nummer ist der Radius des Schattenkegels sowohl für den Halbschatten als auch für den Vollschatten einfach (ohne Akzent) mit dem Buchstaben l bezeichnet. Der Akzent bedeutet weiter unten die Ableitung von l nach der Zeit T. Ebenso bedeutet i die Tangente des halben Öffnungswinkels des Halb- oder Vollschattenkegels.

Die stündlichen Änderungen ξ', η', ζ' der Ortskoordinaten erhält man durch Differentiation der Gleichungen (Nr. 15, 7):

$$\xi = \varrho \cos \Phi' \sin \vartheta$$
$$\eta = \varrho \sin \Phi' \cos d - \varrho \cos \Phi' \sin d \cos \vartheta$$
$$\zeta = \varrho \sin \Phi' \sin d + \varrho \cos \Phi' \cos d \cos \vartheta,$$

worin d und $\vartheta = \Theta - a$ mit der Zeit als variabel zu betrachten sind. Da sich a im Verlauf der Finsternis nur wenig ändert, wird man für $(\Theta - a)'$ die stündliche Änderung der Sternzeit, d. h. $\vartheta' = \mu'$ (Nr. 15) setzen können, wo $\log \mu' = 9\,41916$ ist. Man hat dann:

$$\xi' = \mu' \varrho \cos \Phi' \cos \vartheta$$
$$\eta' = \mu' \xi \sin d - \zeta d'$$
$$\zeta' = -\mu' \xi \cos d + \eta d',$$

oder, da aus den Gleichungen für η, ζ folgt:

$$-\eta \sin d + \zeta \cos d = \varrho \cos \Phi' \cos \vartheta,$$

läßt sich auch schreiben:

$$\xi' = \mu' (-\eta \sin d + \zeta \cos d)$$
$$\eta' = \mu' \xi \sin d - \zeta d'$$
$$\zeta' = -\mu' \xi \cos d + \eta d',$$

und wenn ξ und η vermittels der Gleichungen:

$$\xi = x - (l - i\zeta) \sin \alpha, \qquad \eta = y - (l - i\zeta) \cos \alpha$$

eliminiert werden:

$$\xi' = \mu' [-y \sin d + (l - i\zeta) \sin d \cos \alpha + \zeta \cos d]$$
$$\eta' = \mu' [+x \sin d - (l - i\zeta) \sin d \sin \alpha] - \zeta \cdot d'$$
$$\zeta' = \mu' [-x \cos d + (l - i\zeta) \cos d \sin \alpha] + [y - (l - i\zeta) \cos \alpha] d'.$$

Werden diese Ausdrücke für ξ', η', ζ' in die oben stehende Gleichung:

$$(x' - \xi') \sin \alpha + (y' - \eta') \cos \alpha - (l' - i\zeta') = 0$$

eingeführt und bei Ausführung dieser Operation die sehr kleinen Glieder von der Ordnung i^2 und id' vernachlässigt, so erhält man,

wenn zur Abkürzung die für eine gegebene Zeit T aus den Besselschen Elementen folgenden, also bekannten Größen:

$$(1)\qquad \begin{cases} r = -l' - \mu' i x \cos d \\ p = -y' + \mu' x \sin d \\ q = \quad x' + \mu' y \sin d + \mu' i l \cos d \end{cases}$$

gesetzt werden, den Ausdruck:

$$r - p\cos\alpha + q\sin\alpha - \zeta(\mu'\cos d\sin\alpha - d'\cos\alpha) = 0.$$

Derselbe ist noch einer weiteren Vereinfachung fähig. Setzt man nämlich:

$$(2)\qquad \begin{cases} e\sin E = p, & f\sin F = d' \\ e\cos E = q, & f\cos F = \mu'\cos d, \end{cases}$$

so läßt sich die Bedingungsgleichung des vorliegenden Problems so schreiben:

$$(3)\qquad r + e\sin(\alpha - E) - \zeta f\sin(\alpha - F) = 0.$$

Dabei sind r und F so kleine Größen, daß sie vernachlässigt werden können, also für (3) gesetzt werden kann:

$$(3^*)\qquad e\sin(\alpha - E) - \zeta f\sin\alpha = 0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Fundamentalgleichung der Finsternisse:

$$(4)\qquad \begin{cases} (l - i\zeta)\sin\alpha = x - \xi, \quad (l - i\zeta)\cos\alpha = y - \eta, \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \end{cases}$$

dient zur Ermittlung der für eine gegebene Zeit gesuchten Unbekannten α, ξ, η, ζ, aus denen man dann die sphärischen Koordinaten der Punkte der nördlichen und südlichen Grenzkurve erhält.

Die Größen r, p, q, E, e, F und f sind bekannte Funktionen der Zeit und können auf Grund der Besselschen Elemente für die vollen Stunden vorweg berechnet, tabuliert und sodann für eine gegebene Zeit T aus der Tabelle interpoliert werden. In den folgenden Tabellen sind diese Größen für die Sonnenfinsternis 1908 Juni 28 mitgeteilt und zwar für äußere Berührung[1]):

1) Also für den Radius des Halbschattenkegels, der in der Tafel der Besselschen Elemente mit l' bezeichnet ist.

T	r	p	q	p'	q'
2^h	+ 0.00159	− 0.16136	+ 0.52353	+ 0.05380	+ 0.00285
3	+ 0.00098	− 0.10754	+ 0.52636	+ 0.05381	+ 0.00281
4	+ 0.00038	− 0.05375	+ 0.52915	+ 0.05381	+ 0.00276
5	− 0.00021	+ 0.00008	+ 0.53187	+ 0.05383	+ 0.00269
6	− 0.00080	+ 0.05391	+ 0.53453	+ 0.05383	+ 0.00261
7	− 0.00139	+ 0.10772	+ 0.53709	+ 0.05383	+ 0.00250

Die stündlichen Änderungen p', q' von p und q, welche ebenfalls später gebraucht werden, sind hinzugefügt worden. Ferner hat man:

T	E	$\log e$	F	$\log f$
2^h	342°52.5′	9.73867	0°0.0′	9.38223
3	348 27.2	9.73016	„ „	9.38224
4	354 12.0	9.72581	„ „	9.38225
5	0 0.5	9.72582	„ „	9.38225
6	5 45.6	9.73017	„ „	9.38226
7	11 20.5	9.73860	„ „	9.38226

Es handelt sich nun zunächst darum, die Zeitgrenzen zu bestimmen, zwischen denen eine Lösung der Gleichungen (3*) und (4) für die nördliche und südliche Grenzkurve überhaupt denkbar ist. Der erste und letzte Punkt der nördlichen und südlichen Grenzkurve ist offenbar durch:

$$\zeta = 0$$

bestimmt. Damit erhält man aus (3*) $\sin(\alpha - E) = 0$, also $\alpha = E$ oder $180^0 + E$, und die Gleichungen (4) lauten für diese Grenzpunkte:

$$\xi = x - l \sin\alpha, \qquad \eta = y - l\cos\alpha, \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

oder mit Rücksicht auf die vorstehenden Grenzwerte für α, wenn noch:

$$\xi = \sin\gamma \quad \text{und} \quad \eta = \cos\gamma$$

gesetzt wird:

$$\sin\gamma = x \mp l \sin E, \quad \text{wo} \quad \sin E = \frac{p}{e}$$

$$\cos\gamma = y \mp l \cos E, \quad \text{wo} \quad \cos E = \frac{q}{e}.$$

Es sei nun die dem ersten und letzten Punkt der Grenzkurve entsprechende Zeit $T = T_0 + \tau$, wo wieder T_0 eine der Mitte der Finsternis nahe liegende Epoche ist. Man hat dann, wenn E_0 der tabulierte Wert von E zur Zeit T_0 ist, bei Vernachlässigung der sehr kleinen Änderung von e:

$$\sin E = \sin E_0 + \frac{p'}{e}\tau, \qquad \cos E = \cos E_0 + \frac{q'}{e}\tau,$$

und die vorstehenden Gleichungen lauten, wenn x_0, y_0 zu T_0 gehören:

$$\sin\gamma = x_0 + x'\cdot\tau \mp l\sin E_0 \mp \frac{l}{e}p'\cdot\tau$$

$$\cos\gamma = y_0 + y'\cdot\tau \mp l\cos E_0 \mp \frac{l}{e}q'\cdot\tau.$$

Mit den Abkürzungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} a\sin A = x_0 \mp l\sin E_0, & b\sin B = x' \mp \frac{l}{e}p' \\ a\cos A = y_0 \mp l\cos E_0, & b\cos B = y' \mp \frac{l}{e}q', \end{cases}$$

wobei das obere Zeichen für die südliche, das untere für die nördliche Grenzkurve gilt, lassen sie sich wieder auf die bekannte Form bringen:

$$\sin\gamma = a\sin A + b\sin B\,\tau$$

$$\cos\gamma = a\cos A + b\cos B\,\tau,$$

woraus für γ und τ die Lösungen folgen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \sin(\gamma - B) = a\sin(A - B) \\ \tau = -\dfrac{a\cos(A-B)}{b} + \dfrac{\cos(\gamma - B)}{b} \\ T = T_0 + \tau. \end{cases}$$

Dabei ist der Winkel $\gamma - B$ so zu bestimmen, daß $\cos(\gamma - B)$ für den Anfang negativ und für das Ende positiv wird.

Die so gefundenen Werte γ und T für die Grenzpunkte des einfachen nördlichen oder südlichen Kontakts werden nur annähernd richtig sein. Um sie genauer zu erhalten, führe man die Rechnung mit den gefundenen Grenzzeiten und den dazu gehörigen Elementen für Anfang und Ende, also für den westlichen und östlichen Punkt, noch einmal aus.

Mit dem so gefundenen Wert von γ werden schließlich die Koordinaten Φ' und l der Grenzpunkte aus dem bekannten Formelsystem erhalten:

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos\Phi' \sin\vartheta = & \sin\gamma \\ \cos\Phi' \cos\vartheta = & -\cos\gamma \sin d \\ \sin\Phi' = & \cos\gamma \cos d \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Östl. Länge:} \\ l = \vartheta - (\mu - a) \end{matrix}$$

oder noch bequemer aus:

$$(7^*)\qquad \sin\Phi' = \eta \cos d \quad \text{und} \quad \sin\vartheta = \frac{\xi}{\cos\Phi'}.$$

Es handle sich um die Berechnung der Grenzzeiten und der dazu gehörigen extremen Positionen der Kurve des einfachen südlichen Kontakts für die Finsternis 1908 Juni 28.

Für die Ausgangsepoche $T_0 = 4^h$ gibt die Tafel der Besselschen Elemente und die Hilfstafel folgende Werte:

$x_0 = -0.26345$	$x' = +0.51551$	$E_0 = 354^0 12.0'$
$y_0 = +0.12547$	$y' = +0.02640$	$\log e = 9.72581$
$p' = +0.05381$	$q' = +0.00276$	$l' = +0.56025$ (äußere Berührung)

Damit ergibt die erste Näherung:

$$A = 205^0 35.4' \qquad B = 87^0\ 4.2'$$
$$\gamma' - B = 157^0 10.9' \qquad \gamma'' - B = 22^0 49.1'$$
$$\tau' = -1.509^h \qquad \tau'' = +2.504^h$$

und die genäherten Grenzzeiten:

$$T = 2^h 29.5^m \quad \text{und} \quad T = 6^h 30.2^m.$$

Eine Wiederholung der Rechnung führt zu folgendem Resultat:

Westlicher Ort:	Östlicher Ort:
$T = 2^h 30^m$	$6^h 30^m$
(Tafel)	(Tafel)
$E_0 = 345^0 39.8'$	$8^0 33.0'$
$x_0 = -1.03670$	$+1.02534$
$y_0 = +0.08554$	$+0.19042$

Westlicher Ort:	Östlicher Ort:
$T = 2^h\,30^m$	$6^h\,30^m$
(Tafel)	(Tafel)
$x' = +\,0.51543$	$+\,0.51546$
$y' = +\,0.02683$	$+\,0.02560$
$p' = +\,0.05381$	$+\,0.05383$
$q' = +\,0.00283$	$+\,0.00255$
$l' = +\,0.56009$	$+\,0.56041$
$\log e = \quad 9.73441$	9.73438
(Formel 5):	
$\log a \sin A = 9.95329_n$	9.97406
$\log a \cos A = 9.66002_n$	9.56084_n
$A = 243^0\,1.4'$	$111^0\,6.9'$
$\log b \sin B = 9.66265$	9.66262
$\log b \cos B = 8.37858$	8.36116
$B = 87^0\,1.4'$	$87^0\,8.4'$
$\log a = 0.00332$	0.00425
$\log b = 9.66324$	9.66316
(Formel 6):	
$\gamma - B = 155^0\,48.2'$	$24^0\,13.6'$
$\gamma = 242^0\,49.6'$	$111^0\,22.0'$
$-\frac{a\cos(A-B)}{b} = \quad 1.9990^h$	$-\,2.0040^h$
$+\frac{\cos(\gamma-B)}{b} = -\,1.9807$	$+\,1.9806$
$\tau = +\,0.0183$	$-\,0.0234$
$T = 2^h\,31.10^m$	$6^h_d\,28.60^m$

(Formel 7*):

$\log \eta =$	9.65961_n	9.56150_n
$\log \cos d =$	9.96308	9.96310
$\log \sin \Phi' =$	9.62269_n	9.52460_n
$\Phi' =$	$-24^0\,48'$	$-19^0\,33'$
$\log \xi =$	9.94921_n	9.96907
$\log \cos \Phi' =$	9.95798	9.97421
$\log \sin \vartheta =$	9.99123_n	9.99486
$\vartheta =$	$281^0\,28'$	$81^0\,12'$
$-(\mu - a) =$	$-\ 37^0\ 2'$	$-96\ 24$
$l =$	$244\ 26$ östl.	$344\ 48$ östl.
$=$	$115\ 34$ westl.	$15\ 12$ westl.

Die berechneten Positionen sind der westliche und der östliche Endpunkt der Kurve des einfachen südlichen Kontakts (vgl. die Karte Fig. 18 des Nautical Almanac).

Nachdem wir die Grenzzeiten und extremen Positionen der Kurve des einfachen nördlichen und südlichen Kontaktes ermittelt haben, ist weiter zu zeigen, wie aus den Gleichungen (3*) und (4) für eine zwischen den Grenzzeiten liegende Zeit T die Ermittlung eines Punktes ξ, η, ζ dieser Kurven erfolgt. Setzt man:

$$(8) \qquad \sin\beta \sin\gamma = x - l \sin\alpha, \quad \sin\beta \cos\gamma = y - l \cos\alpha,$$

so nehmen die Gleichungen (4) die Form an:

$$(8^*) \qquad \begin{cases} \xi = \sin\beta \sin\gamma + i\zeta \sin\alpha \\ \eta = \sin\beta \cos\gamma + i\zeta \cos\alpha, \end{cases}$$

und man hat:

$$\zeta^2 = 1 - \xi^2 - \eta^2 = \cos^2\beta - 2i\zeta \sin\beta \cos(\alpha - \gamma) - (i\zeta)^2.$$

Da nun i, die Tangente des halben Öffnungswinkels des Schattenkegels, sehr klein ist, kann man als vorläufigen Näherungswert:

$$(9) \qquad \zeta = \cos\beta$$

benutzen, womit Gleichung (3*) wird:

$$\frac{\sin(\alpha - E)}{\sin \alpha} = \frac{f \cos \beta}{e}$$

oder:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \tfrac{1}{2} E) = \frac{e + f \cos \beta}{e - f \cos \beta} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E$$

und mit:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{f}{e} \cos \beta \tag{10}$$

noch einfacher:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \tfrac{1}{2} E) = \operatorname{tg}(45^0 + \nu) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E. \tag{11}$$

Die Auflösung dieser Gleichung kann nur durch ein Näherungsverfahren erfolgen, indem man zunächst eine Annahme für α macht, damit β nach Formel (8) bestimmt und sodann mittels Gleichung (10) und (11) einen strengen Wert für α sucht. Einen Anhalt bezüglich dieser Annahme für α gewähren die Grenzwerte, zwischen denen es zu suchen ist. Für die obere Grenze ist $\zeta = 0$, also $\alpha = E$, für die untere $\zeta = \cos \beta = 1$, d. h., wenn ν und χ aus:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{f}{e} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg}(45^0 + \nu) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E \tag{12}$$

bestimmt werden, so ist die untere Grenze von α:

$$\alpha = \tfrac{1}{2} E + \chi.$$

Es empfiehlt sich, für α den Mittelwert zwischen oberer und unterer Grenze, also:

$$\alpha = \tfrac{1}{2} [E + \tfrac{1}{2} E + \chi] \tag{13}$$

zu nehmen und damit die Rechnung zu beginnen. Bemerkt sei noch, daß der direkte Wert von E für die südliche Grenzkurve, dagegen $180^0 + E$ für die nördliche Grenzkurve gilt.

Ist der definitive Wert von α gefunden, welcher der Gleichung (11) Genüge leistet, so erhält man ξ und η aus den Gleichungen (8) und (8*), ζ aus $\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$, und damit die Koordinaten Φ' und ϑ des zur Zeit T gehörigen Ortes der Grenzkurve aus:

$$\begin{cases} \cos \Phi' \sin \vartheta = & \xi \\ \cos \Phi' \cos \vartheta = & -\eta \sin d + \zeta \cos d \\ \sin \Phi' = & +\eta \cos d + \zeta \sin d. \end{cases} \tag{14}$$

Diese Gleichungen ergeben sich sofort aus einer einfachen Transformation des Gleichungssystems (7) in Nr. 15 unter Vernachlässigung der Erdabplattung, d. h. $\varrho = 1$. Man kann sie für logarithmische Rechnung bequemer gestalten, indem man setzt:

$$c \sin C = \eta, \qquad c \cos C = \zeta, \tag{15}$$

womit das System (14) wird:

$$\text{(14*)} \quad \begin{cases} \cos \Phi' \sin \vartheta & = \xi \\ \cos \Phi' \cos \vartheta & = c \cos (C + d) \\ \sin \Phi' & = c \sin (C + d) \\ \text{Östl. Länge } l & = \vartheta - (\mu - a). \end{cases}$$

Es werde beispielsweise die zu $T = 4^h$ gehörige Position der Kurve des einfachen südlichen Kontakts für die Finsternis 1908 Juni 28 gesucht. Die Elemente der Rechnung sind:

$$x = -0.26345 \qquad l' = +0.56025$$
$$y = +0.12547 \qquad \log i' = 7.66270$$
(Äußere Berührung)

$$\log \sin d = 9.59703, \quad \log \cos d = 9.96308,$$

$$\mu - a = 59^0 15.4'$$

$$E = 354^0 12', \quad \log e = 9.72581, \quad \log f = 9.38225.$$

Hiermit ergeben die Formeln (12) $v = 24^0 23.2'$, $\chi = 172^0 20'$, also:

Untere Grenze — Obere Grenze

$$\alpha = \tfrac{1}{2}E + \chi = 349^0 26', \quad \alpha = E = 354^0 12'.$$

Das Mittel aus diesen beiden Werten gibt für α eine erste Approximation $\alpha = 352^0$ und damit bei vierstelliger Rechnung $\log \zeta = \log \cos \beta = 9.9500$, womit α aus (10) und (11) von neuem bestimmt wird. Nach einigen weiteren Approximationen erhält man den definitiven Wert:

$$\alpha = 350^0 19.1'$$

und damit nach (8) und (8*):

$$\sin \beta \sin \gamma = -0.16923 \qquad \sin \beta \cos \gamma = -0.42679$$
$$i\zeta \sin \alpha = -0.00069 \qquad i\zeta \cos \alpha = +0.00404$$
$$\xi = -0.16992 \qquad \eta = -0.42275$$

$$\zeta = +0.89015.$$

Hiermit erhält man nach dem Formelsystem (14) oder (14*):

$$\begin{aligned} \vartheta &= 350^0\ 12.6' \\ \mu - a &= \underline{\ 59\ \ 15.4} \qquad \Phi' = -\ 2^0\ 5.0'. \\ l &= 290\ \ 57.2 \text{ östl.} \\ &= \ 69\ \ \ 2.8 \text{ westl.} \end{aligned}$$

Die im vorstehenden entwickelten Formeln können auch zur Berechnung der nördlichen und südlichen Grenzkurve der Totalitätszone dienen, wenn man an Stelle der Größen l und i für den Halbschatten die entsprechenden Größen für den Vollschatten in die Gleichungen (1) einführt, also die Elemente für den Vollschattenkegel der Rechnung zugrunde legt.

19. Die Kurve der zentralen Verfinsterung.

Die Gesamtheit aller derjenigen Erdörter, durch welche die Achse des Schattenkegels hindurchgeht, bestimmt die Kurve der zentralen Verfinsterung. Ihre Definitionsgleichungen sind:

$$\xi = x, \qquad \eta = y.$$

Bei Vernachlässigung der Erdabplattung ($\varrho = 1$) hat man also sehr einfach (Nr. **18B**, 14):

$$\left.\begin{aligned} \cos\Phi' \sin\vartheta &= x \\ \cos\Phi' \cos\vartheta &= -\,y \sin d + \zeta \cos d \\ \sin\Phi' &= +\,y \cos d + \zeta \sin d \end{aligned}\right\}, \text{ wo } \zeta = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Setzt man zum Zwecke logarithmischer Berechnung:

$$\begin{aligned} x &= \sin\beta \sin\gamma, & \sin\beta \cos\gamma &= c \sin C, \\ y &= \sin\beta \cos\gamma, & \cos\beta &= c \cos C, \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \cos\Phi' \sin\vartheta &= x, \\ \cos\Phi' \cos\vartheta &= c \cos(C + d) \\ \sin\Phi' &= c \sin(C + d) \\ l &= \vartheta - (\mu - a). \end{aligned}$$

Die Grenzzeiten und Grenzpositionen der Kurve der zentralen Verfinsterung sind bereits in Nr. **17C** berechnet worden.

Es handle sich beispielsweise um die Bestimmung des Ortes der zentralen Finsternis 1908 Juni 28 für $T = 6^h$ mittl. Zeit Greenw. Für diese Zeit gibt die Tafel der Besselschen Elemente:

$$x = +\,0.76757, \qquad y = +\,0.17759,$$
$$\log\sin d = 9.59696, \qquad \log\cos d = 9.96310,$$
$$d = 23^0\,17.2', \qquad \mu - a = 89^0\,15.3',$$

und damit erhält man:

$\log\sin\beta\sin\gamma = 9.88512$	$\log\sin\beta\sin\gamma = 9.88512$
$\log\sin\beta\cos\gamma = 9.24942$	$\log\sin\gamma = 9.98868$
$\log\operatorname{tg}\gamma = 0.63570$	$\log\sin\beta = 9.89644$
$\gamma = 76^0\,58.4'$	$\beta = 51^0\,59.1'$
$\log c\sin C = 9.24942$	$C = 16^0\ 5.1'$
$\log c\cos C = 9.78948$	$d = 23\ 17.2$
$\log\operatorname{tg} C = 9.45994$	$C + d = 39\ 22.3$
$\log c\cos C = 9.78948$	$\log\cos(C+d) = 9.88821$
$\log\cos C = 9.98266$	$\log\sin(C+d) = 9.80233$
$\log c = 9.80682$	
$\log\cos\Phi'\sin\vartheta = 9.88512$	$\log\sin\Phi' = 9.60915$
$\log\cos\Phi'\cos\vartheta = 9.69503$	
$\log\operatorname{tg}\vartheta = 0.19009$	
$\vartheta = 57^0\ 9.4'$	$\Phi' = 23^0\,59.4'$
$\mu - a = 89\ 15.3$	Redukt. = 8.5
$l = 327\ 54.1$ östl.	$\Phi = 24\ 7.9$
$= 32\ 5.9$ westl.	

20. Dauer der totalen oder ringförmigen Finsternis.

Ist T die Zeit der zentralen Finsternis im Erdort ξ, η, ζ und t die Dauer der totalen oder ringförmigen Finsternis daselbst, so wird $T - \frac{1}{2}t$ die Zeit des Anfangs und $T + \frac{1}{2}t$ die Zeit des Endes derselben sein, und man hat, wenn x, y, x', y', ξ, η, ξ', η' zu T gehören (Nr. 15, 13*):

$$(l - i\zeta)\sin\alpha = x \mp \tfrac{1}{2}x' \cdot t - (\xi \mp \tfrac{1}{2}\xi' \cdot t)$$
$$(l - i\zeta)\cos\alpha = y \mp \tfrac{1}{2}y' \cdot t - (\eta \mp \tfrac{1}{2}\eta' \cdot t).$$

Hierin ist l der Radius des Vollschattens in der Fundamentalebene und $i = \operatorname{tg} f$ die Tangente des halben Öffnungswinkels des Vollschattens.

Für die Orte der zentralen Verfinsterung ist nun aber (Nr. 19):

$$x = \sin\beta\sin\gamma = \xi, \quad y = \sin\beta\cos\gamma = \eta, \quad \zeta = \cos\beta,$$

womit sich die vorstehenden Gleichungen auf:

$$(l - i\cos\beta)\sin\alpha = \mp (x' - \xi') \cdot \frac{t}{2}$$

$$(l - i\cos\beta)\cos\alpha = \mp (y' - \eta') \cdot \frac{t}{2}$$

reduzieren. Nach früheren Entwickelungen hat man bei Vernachlässigung der sehr kleinen Änderung d' (Nr. 18B):

$$\xi' = \mu'(-\eta\sin d + \zeta\cos d), \quad \eta' = \mu'\,\xi\sin d,$$

also für die Punkte der zentralen Kurve:

$$x' - \xi' = x' + \mu'\,y\sin d - \mu'\cos\beta\cos d, \quad y' - \eta' = y' - \mu'\,x\sin d.$$

Setzt man:

$$L = l - i\cos\beta,$$
$$C = x' + \mu'\,y\sin d - \mu'\cos\beta\cos d,$$
$$C' = y' - \mu'\,x\sin d,$$

so hat man die beiden Gleichungen:

$$L\sin\alpha = \mp C \cdot \frac{t}{2}, \qquad L\cos\alpha = \mp C' \cdot \frac{t}{2},$$

woraus zur Bestimmung von α und t:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C}{C'} \quad \text{und} \quad t = \frac{2L\sin\alpha}{C}$$

folgt. Hierin ist die Dauer t der totalen oder ringförmigen Finsternis in Einheiten der Stunde ausgedrückt. Um sie in Zeitsekunden zu erhalten, muß man mit 3600 multiplizieren, also:

$$t = \frac{7200 \cdot L\sin\alpha}{C}$$

setzen.

C und C' sind die relativen Geschwindigkeitskomponenten des Schattenkegels in Richtung der X- und Y-Achse. Sie setzen sich zusammen aus den absoluten Geschwindigkeitskomponenten des Schattenkegels infolge seiner Eigenbewegung im Raume und den Geschwindigkeitskomponenten der Erdrotation nach diesen Richtungen.

Beispiel: Für den in Nr. 19 ermittelten, zu $T = 6^h$ gehörigen Ort der Kurve der zentralen Verfinsterung ist die Dauer der ringförmigen Finsternis zu bestimmen.

Die aus der Tafel entnommenen Besselschen Elemente sind:

$$\log i = 7.66052, \qquad l = 0.01446,$$
$$x' + \mu' y \sin d = + 0.53391 \qquad \log f = \log \mu' \cos d$$
$$y' - \mu' x \sin d = - 0.05391 \qquad = 9.38226.$$

In Nr. 19 wurde gefunden $\beta = 51^0 59.1'$, und hiermit wird:

$$C = + 0.38541, \quad C' = - 0.05391, \quad L = + 0.01164,$$

$$\log C = 9.58592 \qquad \log L = 8.06595$$
$$\log C' = \underline{8.73167_n} \qquad \log \sin \alpha = \underline{9.99579}$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha = 0.85425_n \qquad \log L \sin \alpha = 8.06174$$
$$\alpha = 97^0 57.8' \qquad \log C = \underline{9.58592}$$
$$\log \frac{L \sin \alpha}{C} = 8.47582$$
$$\log 7200 = \underline{3.85733}$$
$$\log t = 2.33315$$

$$t = 215.4^s = 3^m 35.4^s.$$

21. Die Übersichtskarte der Sonnenfinsternis.

Um die Lage der Grenzkurven und den Verlauf einer Sonnenfinsternis auf dem Erdglobus zu kennzeichnen, werden im Nautical Almanac und in der Connaissance des temps Karten veröffentlicht, welche auf Grund der berechneten Positionen konstruiert worden sind. Umstehende, aus dem Nautical Almanac entnommene Karte (Fig. 18) gibt eine Übersicht über die ringförmige Sonnenfinsternis 1908 Juni 28, welche als Paradigma für die Bestimmung der Phasen und Grenzpositionen in dem Vorstehenden

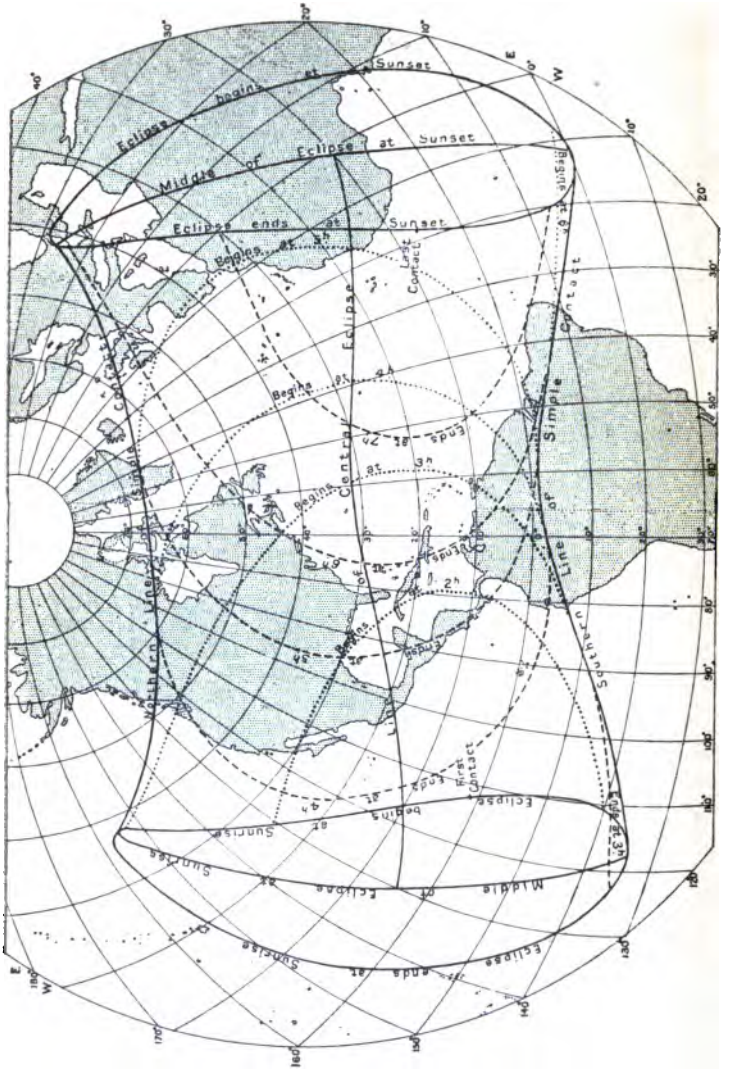


Fig. 18.

benutzt wurde. Die Projektionsart ist die sogenannte „äquidistante Projektion", eine Abart der Globular-Projektion. Im Berliner

Jahrbuch fehlt eine solche Karte, dagegen werden in dieser Ephemeride eine genügende Anzahl von Positionen der Grenzkurven und Zentrallinie mitgeteilt, um den Verlauf der Finsternis zu veranschaulichen.

22. Prädiktion der Phasen einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Erdort innerhalb des Sichtbarkeitsbereiches.

Die Bestimmung der Elemente einer Sonnenfinsternis, ihrer Sichtbarkeitsgrenzen und allgemeinen Phasen liegt den Berechnern der astronomischen Ephemeriden ob. Die Aufgabe dagegen, auf Grund dieser Angaben die Verhältnisse einer Finsternis für einen beliebigen Erdort innerhalb des Bereiches der Sichtbarkeit voraus zu bestimmen, fällt dem an diesem Phänomen interessierten Astronomen zu. In dem Folgenden werden die Formeln für diese Vorausbestimmung mitgeteilt und durch ein Paradigma erläutert.

Gegeben ist die geographische Breite Φ und die Länge l des Beobachtungsortes. Es ist dann zunächst die geozentrische Breite Φ' und der Logarithmus des Erdradius ϱ zu ermitteln. Sofern nicht Hilfstafeln hierfür zur Verfügung stehen, geschieht dies am bequemsten mittels der Formeln:

$$\Phi' = \Phi - 11'30.65'' \sin 2\Phi + 1.16'' \sin 4\Phi \ldots$$

$$\log \varrho = 9.999275 + 0.000727 \cos 2\Phi \ldots,$$

denen der Besselsche Wert $e = 0.08170$ der Exzentrizität des Erdellipsoids zugrunde liegt.[1])

Da die Argumente, für welche die Rechnungsdaten aus der Tafel der Besselschen Elemente zu entnehmen sind, nämlich Beginn und Ende der Finsternis, für den betreffenden Erdort (Φ, l) zunächst unbekannt, d. i. die zu ermittelnden Größen selbst sind, so wird die Lösung der Aufgabe nicht direkt, sondern nur durch sukzessive Näherung geschehen können. Man geht von einer der Mitte der Finsternis nahen, sonst aber beliebig gewählten Epoche T_0 mittl. Zeit des ersten Meridians aus und er-

1) Im Berliner Jahrbuch sind die geozentrischen Koordinaten mit der oben angegebenen Besselschen Exzentrizität berechnet, im Nautical Almanac mit dem Wert der Exzentrizität nach Clarke. Dadurch ergeben sich Unterschiede in der geozentrischen Breite, die bis zu 14″ betragen können.

mittelt durch eine erste Näherung zunächst approximativ Anfang und Ende der Finsternis. Eine zweite Näherung, die für Anfang und Ende mit den diesen Zeitpunkten entsprechenden Besselschen Größen getrennt durchzuführen ist, liefert dann die definitiven Werte für die Phasen der Finsternis.

Von den in der nachstehenden Formelzusammenstellung vorkommenden Größen sind die folgenden für die der Rechnung zugrunde liegende Zeit aus der Tafel der Besselschen Elemente zu entlehnen:

$\mu - a$, der Stundenwinkel der Achse des Schattenkegels in bezug auf den Meridian von Greenwich; μ ist die der mittleren Zeit T entsprechende Sternzeit, a die Rektaszension der Schattenkegelachse.

$\log \sin d$ und $\log \cos d$, wo d die Deklination der Schattenkegelachse ist.

x, y, x', y', die rechtwinkligen Koordinaten des Mondes und ihre stündlichen Änderungen.

l', der Radius des Halbschattens in der xy-Ebene, und $i' = \operatorname{tg} f'$ die Tangente des halben Öffnungswinkels des Halbschattenkegels.

Mit diesen Werten und der geozentrischen Breite Φ', der östlichen Länge l des Beobachtungsortes in bezug auf den Meridian von Greenwich sowie dem reduzierten Erdradius ϱ sind dann folgende Größen zu berechnen:

(1) $$\vartheta = \mu - a + l,$$

(2) $$\begin{cases} \xi = \varrho \cos \Phi' \sin \vartheta, \\ \eta = \varrho \sin \Phi' \cos d - \varrho \cos \Phi' \sin d \cos \vartheta, \\ \zeta = \varrho \sin \Phi' \sin d + \varrho \cos \Phi' \cos d \cos \vartheta, \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \xi' = [9.41807]\, \varrho \cos \Phi' \cos \vartheta, \\ \eta' = [9.41807]\, \xi \sin d \end{cases}$$

(die Größen in Klammern stellen Logarithmen dar)

(4) $$\begin{cases} a \sin A = x - \xi, & b \sin B = x' - \xi', \\ a \cos A = y - \eta, & b \cos B = y' - \eta' \end{cases}$$

(a und b stets positiv)

(5) $$L' = l' - i' \zeta$$

$$\sin(\alpha - B) = \frac{a \sin(A - B)}{L'} \tag{6}$$

(für den Eintritt ist $\cos(\alpha - B)$ negativ, für den Austritt positiv zu nehmen)

$$\left.\begin{matrix}\tau' \\ \tau''\end{matrix}\right\} = -\frac{a \cos(A - B)}{b} + \frac{L' \cos(\alpha - B)}{b}. \tag{7}$$

τ' gehört zu α' für den Eintritt, τ'' zu α'' für den Austritt. Die Einheit der Zeit ist die mittlere Stunde.

$$\begin{cases}\text{Eintrittszeit} & T' = T_0 + \tau', \\ \text{Austrittszeit} & T'' = T_0 + \tau''. \end{cases} \tag{8}$$

Die Lokalzeit wird durch Addition der östlichen Länge l erhalten Um die Allgemeinheit der Formeln nicht zu beeinträchtigen, ist der Index 0 bei den Besselschen Elementen, welche zur Ausgangsepoche T_0 der ersten Näherung gehören, fortgelassen worden.

Die Positionswinkel des Ein- und Austritts sind:

$$P' = \alpha' \quad \text{und} \quad P'' = \alpha'',$$

gezählt vom Nordpunkt der Sonnenscheibe über Osten nach Westen. Die beiläufige Kenntnis dieser Winkel P' und P'' ist notwendig bei Beobachtungen an äquatorial montierten Instrumenten. Bei Beobachtungen an Instrumenten, die nach Höhe und Azimut montiert sind, bedarf man der entsprechenden, vom Vertex aus gezählten Winkel. Unter Vertex versteht man denjenigen Punkt des Sonnenrandes, welcher dem Zenit des Beobachtungsortes am nächsten liegt.

Ist in dem Dreieck zwischen Pol, dem Zenit des Beobachtungsortes und der Sonne q der parallaktische Winkel an der Sonne, p der Sinus der Zenitdistanz der Sonne, so hat man:

$$\varrho p \sin q = \varrho \cos \Phi' \sin \vartheta,$$
$$\varrho p \cos q = \varrho \sin \Phi' \cos d - \varrho \cos \Phi' \sin d \cos \vartheta,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) in Nr. 15:

$$\varrho p \sin q = \xi, \qquad \varrho p \cos q = \eta,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} q = \frac{\xi}{\eta}. \tag{9}$$

Sind nun ξ und η die Werte dieser Größen für Anfang und Ende, wie sie sich aus der zweiten Näherung ergeben, und q', q'' die daraus nach Formel (9) berechneten parallaktischen Winkel für Anfang und Ende, so erhält man die von der Vertexrichtung am Sonnenmittelpunkt gezählten Positionswinkel V' und V'' aus:

$$V' = P' - q', \quad V'' = P'' - q'', \tag{10}$$

und zwar in der Richtung gegen Ost. Die Winkel q sind so zu nehmen, daß $\sin q$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin \vartheta$.

Die mittlere Lokalzeit der Mitte der Finsternis oder der größten Phase wird aus der ersten Näherung bestimmt; sie ist annähernd:

$$T + l - \frac{a \cos (A - B)}{b}. \tag{11}$$

Die dazu gehörige kleinste Distanz $\pm a \sin (A - B)$ bestimmt die Größe der Finsternis. Wenn der Sonnendurchmesser $= 1$ gesetzt wird, so ist die in Teilen desselben ausgedrückte

$$\text{Größe der Finsternis} = \frac{L' - [\pm a \sin (A - B)]}{L' + L} \tag{12}$$

für eine totale oder ringförmige Verfinsterung. L' und L sind (Nr. 15) die Radien der Durchschnittskreise des Halb- bzw. Vollschattenkegels mit der Ebene, die durch den Erdort parallel zur XY-Ebene gelegt ist.

Für eine partielle Finsternis dagegen ist die

$$\text{Größe der Finsternis} = \frac{L' - [\pm a \sin (A - B)]}{2(L' - k)}, \tag{13}$$

wo $k = 0.2725$ das Verhältnis des Mondradius zum Erdradius darstellt. In diesen Formeln ist das Vorzeichen so zu wählen, daß $\pm a \sin (A - B)$ positiv wird.

Die Bestätigung der Formeln (12) und (13) erfolgt am einfachsten auf geometrischem Wege unter Bezugnahme auf die Figur 19. HE sei die durch den Erdort G parallel zur Besselschen Fundamentalebene laufende Ebene. Man hat dann wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und EGD sowie der Dreiecke ABD und EHD:

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AD}{ED} \quad \text{und} \quad \frac{AB}{EH} = \frac{AD}{ED},$$

also:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{EG}{EH}.$$

AC ist aber für den Erdort G der vom Monde verfinsterte Teil der Sonne, AB der Durchmesser der Sonne, folglich ihr Verhält-

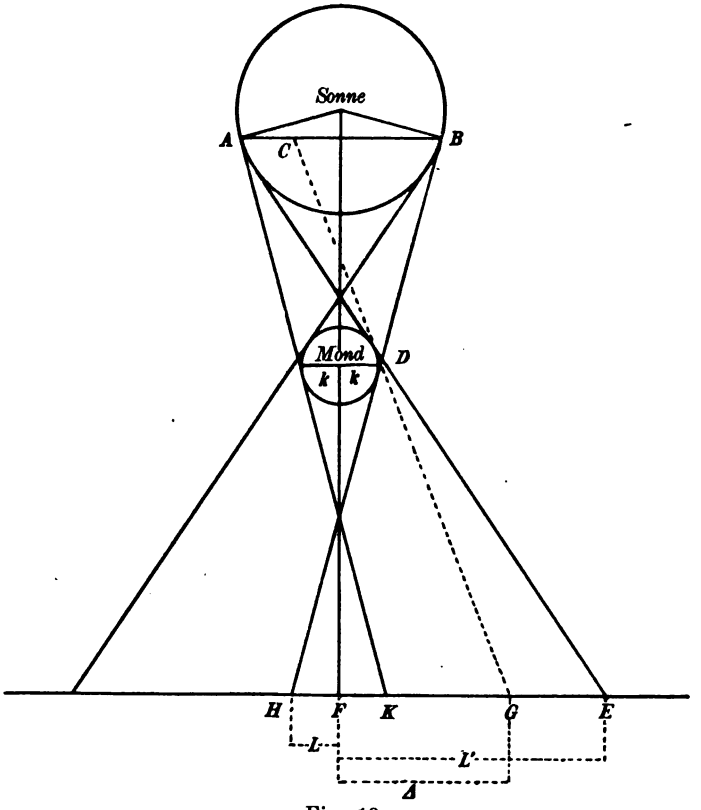


Fig. 19.

nis die in Einheiten des Sonnendurchmessers ausgedrückte Größe der Finsternis. Da nun $EG = EF - GF = L' - \Delta$ und $EH = EF + FH = L' + L$, so hat man:

$$\text{Größe der Finsternis} = \frac{L' - \Delta}{L' + L},$$

wo $\Delta = \pm a \sin(A - B)$ den kleinsten Abstand darstellt, den der Erdort G von der Achse des Schattenkegels erreicht. Die Formel gilt zunächst — entsprechend unserer Figur — für eine ringförmige Finsternis, kann aber auch auf eine totale ausgedehnt werden. In diesem Fall würde $L' - L$ an die Stelle von $L' + L$ treten. Da aber der Radius L des Vollschattens für eine totale Finsternis negatives Vorzeichen hat, weil in Nr. 15 Formel (10) dann $z < h$ ist, so wird man algebraisch auch in diesem Fall $L' + L$ schreiben müssen.

Die Formeln für die Größe der Finsternis sind nur näherungsweise richtig. Bei der großen Entfernung der Sonne wird man ohne beträchtlichen Fehler $f = f'$ setzen können, d. h. AK parallel mit AE betrachten dürfen. Man hat daher $EK = L' - L = 2k$, also auch $L' + L = 2(L' - k)$[1]).

Als Beispiel für die Anwendung der vorstehenden Formeln diene die Berechnung der Phasen der Sonnenfinsternis 1908 Juni 28 für den Beobachtungsort Montreal in Kanada. Die Ortskoordinaten von Montreal sind:

Geogr. Breite $\Phi = +\,45^0 30' 17.0''$, Länge $l = 19^h 5^m 41.37^s$ östl. v. Greenw.

Damit ergeben die geodätischen Tafeln bzw. die oben mitgeteilten Formeln mit dem Wert der Besselschen Exzentrizität:

Geozentr. Breite $\Phi' = +\,45^0 18' 46.4''$ $\quad \log \varrho = 9.999265$

$\log \varrho \cos \Phi' = 9.84637$ $\quad \log \varrho \sin \Phi' = 9.85111.$

Erste Näherung.

Ausgangsepoche $T_0 = 4^h$ mittl. Z. Greenw. Aus der Tafel entnommene Besselsche Elemente für diese Zeit (Nr. 16):

$\log \cos d = 9.96308$ $\quad \log \sin d = 9.59703$

$x = -0.26345$ $\quad y = +0.12547$

$x' = +0.51551$ $\quad y' = +0.02640$

---

1) Folgt auch aus der allgemeinen Formel:

$$k = \frac{L' \sin f \cos f' - L \cos f \sin f'}{\sin f + \sin f'},$$

die man aus den Gleichungen (10) bis (12) der Nr. 15 erhält.

$$\mu - a = 59^0 15.4'$$
$$l' = + 0.56025$$
$$\log i' = 7.66270.$$

Der Raumersparnis wegen werden hier nur die Resultate der ersten Näherung gegeben:

$$\vartheta = 345^0 40.7'$$
$$\xi = - 0.17367 \quad \eta = + 0.38295 \quad \zeta = + 0.90543$$
$$\xi' = + 0.17813 \quad \eta' = - 0.01803$$
$$A = 199^0 13.4' \quad B = 82^0 29.9' \quad L' = 0.55609$$
$$\alpha' - B = 154^0 1.4' \quad \alpha'' - B = 25^0 58.6''$$

$$-\frac{a\cos(A-B)}{b} = + 0.3604 \qquad \frac{L'\cos(\alpha - B)}{b} = \mp 1.4690$$

$T_0 =$	4.0000^h
$\tau' =$	$- 1.1086$
$T' =$	2.8914
$=$	$2^h 53.5^m$
	(Anfang)

$T_0 =$	4.0000^h
$\tau'' =$	$+ 1.8294$
$T'' =$	5.8294
$=$	$5^h 49.8^m$
	(Ende)

Diese erste Näherung gibt die Phasen bereits bis auf zwei Zeitminuten. Man hätte sie umgehen können, wenn man die in Nr. 21 reproduzierte Karte (Fig. 18) des Nautical Almanac zu Rate gezogen hätte. Auf dieser sind durch punktierte und gestrichelte Linien die Orte gleichen Anfangs und Endes für die daneben stehende Greenwicher Zeit angegeben. Man ersieht hieraus, daß die Finsternis für Montreal ungefähr um 3^h beginnt und um 6^h mittl. Greenw. Zeit endigt. Würde man für diese Zeiten die Rechnung getrennt mit den dazu gehörigen Besselschen Elementen durchführen, so würde man die Phasen bereits durch die erste Näherung hinreichend genau finden.

In der jetzt folgenden zweiten Näherung ist die Berechnung in extenso gegeben. Die für die Epoche der Rechnung aus der Tafel der Besselschen Elemente interpolierten Größen sind durch den Zusatz „Tafel" gekennzeichnet.

Zweite Näherung.

Anfang.	Ende.
$T = 2.8914^h$	$T = 5.8294^h$

(Formel 1):

(Tafel) $\mu - a =$	$42^0 37.7'$	$86^0 41.8'$
$l =$	286 25.3	286 25.3
$\vartheta =$	329 3.0	13 7.1

(Formel 2):

$\log \sin \vartheta =$	9.71121_n	9.35595
$\log \varrho \cos \Phi' =$	9.84637	9.84637
$\log \cos \vartheta =$	9.93329	9.98852
$\log \xi =$	9.55758_n	9.20232
$\log \varrho \cos \Phi' \cos \vartheta =$	9.77966	9.83489
(Tafel) $\log \sin d =$	9.59707	9.59697
$\log \varrho \sin \Phi' =$	9.85111	9.85111
(Tafel) $\log \cos d =$	9.96308	9.96310
$\log \varrho \cos \Phi' \cos \vartheta =$	9.77966	9.83489
(I) $\log \varrho \sin \Phi' \cos d =$	9.81419	9.81421
(III) $\log \varrho \sin \Phi' \sin d =$	9.44818	9.44808
(II) $\log \varrho \cos \Phi' \sin d \cos \vartheta =$	9.37673	9.43186
(IV) $\log \varrho \cos \Phi' \cos d \cos \vartheta =$	9.74274	9.79799
Num I $=$	$+0.65191$	$+0.65194$
$-$ Num II $=$	-0.23808	-0.27031
$\eta =$	$+0.41383$	$+0.38163$
Num III $=$	$+0.28066$	$+0.28060$
Num IV $=$	$+0.55301$	$+0.62804$
$\zeta =$	$+0.83367$	$+0.90864$

(Formel 3):

$\log \varrho \cos \Phi' \cdot \cos \vartheta =$	9.77966	9.83489
Constant. $=$	9.41807	9.41807
$\log \xi \sin d =$	9.15465_n	8.79929
$\log \xi' =$	9.19773	9.25296
$\log \eta' =$	8.57272_n	8.21736

(Formel 4):

(Tafel) $x =$	$- 0.83494$	$+ 0.67963$
$- \xi =$	$+ 0.36106$	$- 0.15934$
$a \sin A =$	$- 0.47388$	$+ 0.52029$
(Tafel) $y =$	$+ 0.09600$	$+ 0.17318$
$- \eta =$	$- 0.41383$	$- 0.38163$
$a \cos A =$	$- 0.31783$	$- 0.20845$
(Tafel) $x' =$	$+ 0.51546$	$+ 0.51548$
$- \xi' =$	$- 0.15766$	$- 0.17904$
$b \sin B =$	$+ 0.35780$	$+ 0.33644$
(Tafel) $y' =$	$+ 0.02671$	$+ 0.02580$
$- \eta' =$	$+ 0.03739$	$- 0.01650$
$b \cos B =$	$+ 0.06410$	$+ 0.00930$
$\log a \sin A =$	9.67567_n	9.71624
$\log a \cos A =$	9.50219_n	9.31901_n
$\log \mathrm{tg}\, A =$	0.17348	0.39723_n
$A =$	$236^0\, 9.0'$	$111^0\, 50.0'$
$\log a \sin A =$	9.67567_n	9.71624
$\log \sin A =$	9.91934_n	9.96767
$\log a =$	9.75633	9.74857
$\log b \sin B =$	9.55364	9.52691
$\log b \cos B =$	8.80686	7.96848
$\log \mathrm{tg}\, B =$	0.74678	1.55843
$B =$	$79^0\, 50.6'$	$88^0\, 25.0'$
$\log b \sin B =$	9.55364	9.52691
$\log \sin B =$	9.99314	9.99983
$\log b =$	9.56050	9.52708

(Formel 5):

(Tafel) $\log i' =$	7.66270	7.66269
$\log \zeta =$	9.92099	9.95839
$\log i'\zeta =$	7.58369	7.62108
(Tafel) $l' =$	+ 0.56014	+ 0.56038
$-i'\zeta =$	− 0.00383	− 0.00418
$L' =$	+ 0.55631	+ 0.55620

(Formel 6):

$A - B =$	$156^0 18.4'$	$23^0 25.0'$
$\log a =$	9.75633	9.74857
$\log \sin (A - B) =$	9.60405	9.59924
$\log a \sin (A - B) =$	9.36038	9.34781
$\log L' =$	9.74532	9.74523
$\log \sin (\alpha - B) =$	9.61506	9.60258
$\alpha - B =$	$155^0 39.6'$	$23^0 36.5'$

(Formel 7 und 8):

$\log a =$	9.75633	9.74857
$\log \cos (A - B) =$	9.96176_n	9.96267
$\log a \cos (A - B) =$	9.71809_n	9.71124
$\log b =$	9.56050	9.52708
$\log \frac{a \cos (A - B)}{b} =$	0.15759_n	0.18416
$\log L' =$	9.74532	9.74523
$\log \cos (\alpha - B) =$	9.95958_n	9.96204
$\log L' \cos (\alpha - B) =$	9.70490_n	9.70727
$\log b =$	9.56050	9.52708
$\log \frac{L' \cos (\alpha - B)}{b} =$	0.14440_n	0.18019
$-\frac{a \cos (A - B)}{b} =$	+ 1.4374	− 1.5281

$+\frac{L'\cos(\alpha - B)}{b}$	$-$ 1.3945	$+$ 1.5142
τ	$+$ 0.0429^h	$-$ 0.0139^h
T_0	$+$ 2.8914	$+$ 5.8294
T	2.9343	5.8155
	$2^h 56^m\ 4^s$	$5^h 48^m 56^s$
l	19 5 41	19 5 41
$T + l$	22 1 45	0 54 37
	(Anfang)	(Ende)
	1908 Juni 27 mittl. Z. Montreal	1908 Juni 28 mittl. Z. Montreal

(Formel 9):

$\log \xi$	9.55758_n	9.20233
$\log \eta$	9.61682	9.58164
$\log \operatorname{tg} q$	9.94076_n	9.62069

(Formel 10):

$P' = \alpha' = 235^0 30'$	$P'' = \alpha'' = 112^0\ 2'$
$q' = 318\ 54$	$q'' = 22\ 40$
$V' = 276\ 36$	$V'' = 89\ 22$

gezählt vom Nordpunkt bzw. Vertex der Sonne über Osten.

Die erste Näherung ergibt für die kleinste Distanz:

$$a \sin (A - B) = 0.2435,$$

und da $L' = 0.5562$, so hat man:

$$\text{Größe der Finsternis} = \frac{L' - [\pm a \sin (A - B)]}{2\,[L' - 0.2725]} = 0.551$$

(Sonnendurchmesser $= 1$).

Die Finsternis ist also in Montreal partiell, und zwar wird dort nahezu die Hälfte der Sonne vom Mond bedeckt.

IV. Abschnitt.

Theorie und Vorausberechnung der Sternbedeckungen durch den Mond.

23. Bedingungen für das Zustandekommen einer Sternbedeckung.

Diejenigen Sterne, welche in der Zone der Mondbewegung liegen, werden während des Umlaufs des Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik, also im Zyklus von 18.6 Jahren, vom Monde bedeckt. Die Breite der Bedeckungszone ist für den Erdmittelpunkt durch die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik $i = 5^0 9'$ und durch den Halbmesser des Mondes beschränkt, erweitert sich aber wegen der Parallaxe des Mondes für Beobachtungen an der Erdoberfläche dergestalt, daß die äußerste Entfernung, in der eine Sternbedeckung zustande kommen kann, $5^0 9' + 61' 28.8'' + 16' 44.4'' =$ rund $6^0 27'$ nördlich und südlich von der Ekliptik beträgt, wobei die Distanz von Mondmittelpunkt und Stern annähernd $61' 28.8'' + 16' 14.4'' =$ rund $1^0 20'$ nicht überschreiten darf. Infolge der Besonderheiten der Mondbahn wiederholen sich für Sterne an den Grenzen dieser Zone die Bedeckungen mehrmals im Jahre in aufeinanderfolgenden siderischen Mondumläufen.

24. Gleichungen für die Berechnung einer Sternbedeckung.

Die Okkultation eines Fixsterns durch den Mond kann als Spezialfall einer Sonnenfinsternis betrachtet werden, in dem der Fixstern die Rolle der Sonne übernimmt, deren Entfernung von der Erde in diesem Fall unendlich groß angenommen werden muß. Setzt man demnach in den Gleichungen der Nr. **15** die Parallaxe und den Halbmesser der Sonne gleich Null, bzw. den Öffnungswinkel des Kernschattens $f = 0$, so gelten mutatis mutandis die dort entwickelten Gleichungen auch für die Berechnung der Sternbedeckungen. Die Z-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems ist in diesem Fall parallel der Verbindungslinie von Fixstern und Mondmittelpunkt; in der Formel (6*) der Nr. **15** sind daher die Koordinaten a und d des Punktes Z durch

die Rektaszension α und die Deklination δ des Fixsterns zu ersetzen, womit man für die Mondkoordinaten erhält:

$$x = \Delta_{\mathbb{C}} \cos\delta_{\mathbb{C}} \sin(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha)$$
$$y = \Delta_{\mathbb{C}} [\sin(\delta_{\mathbb{C}} - \delta) \cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha) + \sin(\delta_{\mathbb{C}} + \delta) \sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha)]$$
$$z = \Delta_{\mathbb{C}} [\cos(\delta_{\mathbb{C}} - \delta) \cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha) - \cos(\delta_{\mathbb{C}} + \delta) \sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha)]$$

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \frac{1}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}$$

und für die Koordinaten des Beobachtungsortes aus den Formeln (7):

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = \varrho \cos\Phi' \sin\vartheta \\ \eta = \varrho \sin\Phi' \cos\delta - \varrho \cos\Phi' \sin\delta \cos\vartheta \\ \zeta = \varrho \sin\Phi' \sin\delta + \varrho \cos\Phi' \cos\delta \cos\vartheta, \end{cases}$$

worin:

$$\vartheta = \mu - \alpha$$

der Stundenwinkel des Sterns in bezug auf den Ortsmeridian ist. μ ist die Lokalsternzeit, welche der mittleren Zeit $T + l$ entspricht, T die mittlere Zeit des ersten Meridians, für welche die Stern- und Mondkoordinaten aus der Ephemeride desselben entnommen sind, l die östliche Länge des Ortes gegen den ersten Meridian.

Wählt man die Zeit T so, daß sie mit der geozentrischen Konjunktionszeit T_0 von Mond und Stern in Rektaszension zusammenfällt, für welche $\alpha_{\mathbb{C}} = \alpha$ ist, so nehmen die Mondkoordinaten die einfache Form an:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{\sin(\delta_{\mathbb{C}} - \delta)}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}, \quad z_0 = \frac{\cos(\delta_{\mathbb{C}} - \delta)}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}$$

und können wegen der Kleinheit von $\delta_{\mathbb{C}} - \delta$ (kleiner als der scheinbare Mondhalbmesser) und $\pi_{\mathbb{C}}$ auch so geschrieben werden:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{\delta_{\mathbb{C}} - \delta}{\pi_{\mathbb{C}}}, \quad z_0 = \frac{1}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}.$$

Da in den Formeln für x, y, z nur $\alpha_{\mathbb{C}}$ und $\delta_{\mathbb{C}}$ mit der Zeit veränderlich sind, während $\pi_{\mathbb{C}}$ als konstant betrachtet werden kann, so werden die stündlichen Änderungen dieser Koordinaten aus:

$$x_0' = \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=T_0} = \frac{d\alpha_{\mathbb{C}}}{dt} \cdot \frac{\cos\delta_{\mathbb{C}}}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}$$

$$y_0' = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{t=T_0} = \frac{d\delta_{\mathbb{C}}}{dt} \cdot \frac{\cos(\delta_{\mathbb{C}} - \delta)}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}$$

oder mit den erlaubten Vereinfachungen aus:

$$x_0' = \frac{\mu_{\mathbb{C}} \cos\delta_{\mathbb{C}}}{\pi_{\mathbb{C}}} \quad \text{und} \quad y_0' = \frac{\nu_{\mathbb{C}}}{\pi_{\mathbb{C}}}$$

erhalten, worin $\mu_{\mathbb{C}}$ und $\nu_{\mathbb{C}}$ die stündlichen Änderungen in Mond-Rektaszension und Deklination zur Zeit der geozentrischen Konjunktion darstellen, die ebenso wie $\pi_{\mathbb{C}}$ in Bogensekunden auszudrücken sind.

Die stündlichen Änderungen der Ortskoordinaten ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (14) der Nr. **15**, wenn man darin δ an die Stelle von d setzt und beachtet, daß die Änderung a' fortfällt; man erhält so:

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi' = [9.41916]\, \varrho \cos\Phi' \cos\vartheta \\ \eta' = [9.41916]\, \varrho \cos\Phi' \sin\vartheta \sin\delta, \end{cases}$$

wo die in Klammern stehende Zahl der log 54148 sin 1″ ist. Die dritte Koordinate ζ und ihre stündliche Änderung wird bei Sternbedeckungen nicht gebraucht, sofern die Refraktion unberücksichtigt bleibt.

Da für Fixsterne die Parallaxe gleich Null ist, so wird bei Sternbedeckungen der halbe Öffnungswinkel des Vollschattenkegels $f = 0$ zu setzen sein, d. h. der Kegel geht bei Sternbedeckungen in einen Zylinder über, dessen Achse senkrecht zur Fundamentalebene XY steht und dessen Basis ein Kreis vom konstanten Radius:

$$k = \frac{\text{Mondradius}}{\text{Erdradius}} = 0.27252$$

mit dem Wert k von J. Peters (Astron. Nachrichten 3297) ist. Für Fixsternokkultationen geht daher die Fundamentalgleichung der Finsternisse (Nr. **15**, (13) und (13*)) in die Gleichung einer Zylinderfläche über von der Form:

$$[x - \xi]^2 + [y - \eta]^2 = k^2,$$

die durch die beiden Gleichungen:

$$k \sin \alpha = x - \xi \quad \text{und} \quad k \cos \alpha = y - \eta$$

ersetzt werden kann.

Ist $T = T_0 + \tau$ die gesuchte Zeit der Berührung von Stern und Mond für den zugrunde gelegten Meridian, und gehören $x_0, y_0, x', y', \xi_0, \eta_0, \xi', \eta'$ der Ausgangsepoche T_0 an (die zweckmäßig gleich der Konjunktionszeit von Mond und Stern in Rektaszension gewählt wird, für welche $x_0 = 0$ ist), so erfolgt die Auflösung der vorstehenden Gleichungen nach den beiden Unbekannten α und τ in bekannter Weise mittels der Formeln:

$$(3) \qquad \begin{cases} a \sin A = x_0 - \xi_0, & b \sin B = x' - \xi' \\ a \cos A = y_0 - \eta_0, & b \cos B = y' - \eta' \end{cases}$$

(a und b stets positiv)

$$(4) \qquad \sin(\alpha - B) = \frac{a \sin(A - B)}{k}, \quad \log k = 9.43540.$$

Der Winkel $\alpha' - B$ für Immersion ist aus der vorstehenden Formel so zu bestimmen, daß $\cos(\alpha - B)$ negativ, der Winkel $\alpha'' - B$ für Emersion so, daß dieser Kosinus positiv genommen wird. Den beiden Winkeln entsprechen:

$$(5) \qquad \left.\begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \end{matrix}\right\} = -\frac{a \cos(A - B)}{b} + \frac{k \cos(\alpha - B)}{b},$$

und damit erhält man die mittlere Lokalzeit der:

Immersion $T' = T_0 + \tau' + l$, Emersion $T'' = T_0 + \tau'' + l$,

wenn l die östliche Länge des Beobachtungsortes in bezug auf den Grundmeridian ist.

Die gefundenen Zeiten T' und T'' werden indes von der Wahrheit sehr entfernt sein können, wenn die Korrektionen, welche zur Ausgangsepoche T_0 hinzugefügt werden müssen, beträchtlich sind. In diesem Falle wird man für beide Zeiten getrennt berechnen:

$$x = x_0 + x'\tau', \qquad y = y_0 + y'\tau''$$

und ebenso mit den beiden Stundenwinkel $\vartheta = \mu - \alpha$ die ξ, η, ξ', η' von neuem bestimmen müssen. Es genügt dabei, für x', y' die der Konjunktionszeit entsprechenden stündlichen Änderungen zu nehmen. Die mit diesen Koordinaten nach den obigen Formeln

gesondert für Immersion und Emersion auszuführenden Rechnungen ergeben dann die definitiven Resultate.

Bei Sonnenfinsternissen werden die Positionswinkel am Mittelpunkt der Sonne von der Nordrichtung nach dem Berührungspunkt des Mondes hin gezählt; bei Sternbedeckungen sind sie dagegen am Mondmittelpunkt nach dem Stern hin zu nehmen. Die Positionswinkel der Sternbedeckung unterscheiden sich daher von denen der Sonnenfinsternis um 180^0, und man hat:

(6) $P' = 180^0 + \alpha'$ für Immersion, $P'' = 180^0 + \alpha''$ für Emersion,

gezählt vom Nordpunkt des Mondes über Osten. Die korrespondierenden Winkel vom Ortsscheitelpunkt oder Vertex aus sind:

(7) $V' = P' - q'$ $V'' = P'' - q''$;

q' und q'' sind dabei die parallaktischen Winkel am Stern zur Zeit der Immersion bzw. Emersion. Ein genügend genauer Wert für die Winkel q wird aus $\operatorname{tg} q = \frac{\xi}{\eta}$ gefunden, wo ξ und η die Werte dieser Größen für T' und T'' sind.

25. Berechnung der Elemente der Sternbedeckungen.

In den Jahrbüchern sind Verzeichnisse derjenigen helleren Sterne gegeben, welche im Laufe des Jahres für irgend einen Ort der Erdoberfläche vom Mond bedeckt werden. Um die Berechnung der Ein- und Austrittszeiten für den beobachtenden Astronom tunlichst zu reduzieren, sind in den Jahrbüchern die vom Beobachtungsort unabhängigen Elemente der Sternbedeckung mitgeteilt, nämlich die Zeit der geozentrischen Konjunktion von Stern und Mond in Rektaszension und die zu diesem Zeitpunkt gehörigen Werte:

$$y_0 = \frac{\delta_{\mathbb{C}} - \delta}{\pi_{\mathbb{C}}}, \quad x_0' = \frac{\mu_{\mathbb{C}} \cos \delta_{\mathbb{C}}}{\pi_{\mathbb{C}}}, \quad y_0' = \frac{\nu_{\mathbb{C}}}{\pi_{\mathbb{C}}}$$

in Einheiten der vierten Dezimale. Im Nautical Almanac sind schließlich noch die Grenzparallele, d. h. die Breiten der nördlichen und südlichen Parallelkreise der Erde angegeben, zwischen denen die Sternokkultation sichtbar ist (siehe Nr. 26).

Es handle sich beispielsweise um die Berechnung der Elemente für den Stern ξ^{I} Librae (Größe 5.9). Eine Vergleichung der scheinbaren Koordinaten dieses Sterns mit der Mondepheme-

ride des Nautical Almanac ergibt, daß er am 17. April 1908 vom Mond bedeckt wird.

Die scheinbaren Koordinaten von ξ^{I} Librae sind an diesem Tage:

$$\alpha = 14^h 49^m 24.11^s, \qquad \delta = -11^0 31' 28.5''$$

und die scheinbaren Koordinaten sowie die Parallaxe des Mondes:

1908 April 17 mittl. Z. Greenw.	$\alpha_{\mathbb{C}}$	$\delta_{\mathbb{C}}$	$\pi_{\mathbb{C}}$
10^h	$14^h 44^m 24.46^s$	$-11^0 34' 15.7''$	$57' 11.85''$
11	46 31.81	45 47.9	13.15
12	48 39.42	57 17.1	14.45
13	50 47.30	-12 8 43.2	15.76
14	52 55.46	20 6.1	17.07

Mit 12^h als Ausgangsepoche gibt die Formel (Nr. 16):

$$t = \frac{-(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha)}{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{2}\Delta_2 \cdot \frac{(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha)}{\Delta_1}},$$

$\Delta_1 = 2^m 7.88^s$ $\qquad \log[-(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha)] = 1.65021$

$-\frac{1}{2}\Delta_2 = -\frac{1}{2} \cdot 0.27 = -0.14$ $\qquad \log \text{Nenner} = 2.10650$

$-\frac{1}{2}\Delta_2 \frac{(\alpha_{\mathbb{C}} - \alpha)}{\Delta_1} = +0.05$ $\qquad \log t = 9.54371$

Nenner $= 2\ 7.79$ $\qquad t = 0.3497^h$

$= 20^m 58^s$

σ von $\mathbb{C}$ und $*$ in $AR \ldots T_0 = 12^h 20^m 58^s$,

und dieser Konjunktionszeit entsprechen die Koordinaten und die Parallaxe:

$$\alpha_{\mathbb{C}} = 14^h 49^m 24.11^s, \quad \delta_{\mathbb{C}} = -12^0 1' 17.2'', \quad \pi_{\mathbb{C}} = 57' 14.91''$$

sowie die stündlichen Änderungen:

$$\mu_{\mathbb{C}} = 1917.0'', \qquad \nu_{\mathbb{C}} = -686.6''.$$

Damit wird $\delta_{\mathbb{C}} - \delta = -29' 48.7'' = -1788.7''$ und:

$$\log(\delta_{\mathbb{C}} - \delta) = 3.25254_n \qquad \log \mu_{\mathbb{C}} \cos\delta = 3.27299$$
$$\log \pi_{\mathbb{C}} = 3.53592 \qquad \log \pi_{\mathbb{C}} = 3.53592$$
$$\log y_0 = 9.71662_n \qquad \log x_0' = 9.73707$$
$$y_0 = -0.5207 \qquad x_0' = +0.5458$$

$$\log \nu_{\mathbb{C}} = 2.83670_n$$
$$\log \pi_{\mathbb{C}} = 3.53592$$
$$\log y_0'' = 9.30078_n$$
$$y_0'' = -0.1999$$

26. Grenzen für die Sichtbarkeit einer Sternbedeckung.

Die Grenzkurven für die Sichtbarkeit einer Sternbedeckung lassen sich nach derselben Methode bestimmen wie diejenigen einer Sonnenfinsternis. Bei der großen Zahl der verfinsterten Sterne würde aber die Ausführung der Rechnungen einen zu großen Aufwand an Arbeit erfordern. Im Nautical Almanac beschränkt man sich daher auf die Angabe der äußersten Parallelkreise, zwischen denen eine Sternbedeckung sichtbar ist. Dieselben lassen sich, wie wir nachstehend sehen werden, durch sehr einfache Formeln ermitteln.

Die Grundgleichungen der Sternokkultation für den Erdort ξ, η, ζ sind (Nr. **24**):

$$k \sin\alpha = x - \xi, \qquad k \cos\alpha = y - \eta.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit $\cos B$, die zweite mit $-\sin B$ multipliziert und dann addiert, so kommt:

$$k \sin(\alpha - B) = (x - \xi)\cos B - (y - \eta)\sin B.$$

Wenn, wie oben, B der Winkel ist, den die geradlinige Bahn (x, y) der Achse des Schattenzylinders in der XY-Ebene mit der Y-Achse bildet, so stellt $k \sin(\alpha - B)$ den Abstand des auf dem Schattenkreis vom Radius k liegenden Punktes ξ, η von dieser Bahn dar. Wenn der Punkt ξ, η der nördlichen oder südlichen Grenzkurve angehören soll, wie es unsere Aufgabe verlangt, muß dieser Abstand ein Maximum werden, d. h. es muß $\alpha = 90^0 + B$ oder $\alpha = 270^0 + B$ bzw. $\sin(\alpha - B) = \pm 1$ sein. Hieraus folgt,

daß der auf dem äußersten nördlichen oder südlichen Parallel liegende Erdort die Bedingungsgleichung:

$$(x-\xi)\cos B-(y-\eta)\sin B=\pm k$$

erfüllen muß. Der Winkel B ist hier durch die Gleichungen:

$$b\sin B=x'-\xi' \quad \text{und} \quad b\cos B=y'-\eta'$$

bestimmt. Für eine approximative Berechnung der Grenzen wird es indessen erlaubt sein, die von der Drehung der Erde herrührenden Komponenten ξ' und η' zu vernachlässigen, also zu setzen:

$$b\sin B=x', \qquad b\cos B=y'.$$

Es seien nun x_0 und y_0 die Werte von x und y für eine Ausgangsepoche T_0; dann hat man für die Zeit $T=T_0+\tau$:

$$x=x_0+b\sin B\,\tau, \qquad y=y_0+b\cos B\,\tau,$$

und damit wird die vorstehende Bedingungsgleichung:

$$(x_0-\xi)\cos B-(y_0-\eta)\sin B=\pm k,$$

d. h. es muß:

$$(1) \qquad -\xi\cos B+\eta\sin B=-x_0\cos B+y_0\sin B\pm k$$

eine konstante Größe sein.

Nach Formel (14) in Nr. **18B** ist mutatis mutandis, wenn von der Erdabplattung abgesehen wird:

$$(2) \qquad \sin\Phi=\eta\cos\delta+\zeta\sin\delta, \quad \text{wo} \quad \zeta=\sqrt{1-\xi^2-\eta^2},$$

der Ausdruck für den Sinus der Breite des Erdortes in dem zugrunde gelegten Koordinatensystem. Gesucht wird derjenige Erdort ξ, η, ζ der nördlichen und südlichen Grenzkurve, welcher den kleinsten bzw. größten Polabstand hat, für welchen also Φ ein Maximum unter Erfüllung der Nebenbedingung (1) ist.

Um die Lösung dieser Aufgabe auf einfache Weise zu ermöglichen, führen wir ein neues Koordinatensystem $X'\,Y'\,Z$ ein (Fig. 20), das aus dem alten System $X\,Y\,Z$ dadurch hervorgeht, daß die Achsen X und Y um die Achse Z gedreht werden und zwar um den Winkel B. In dem neuen Koordinatensystem ist dann die Y'-Achse parallel der Bahn der Achse des Schattenzylinders, während die X'-Achse senkrecht darauf steht.

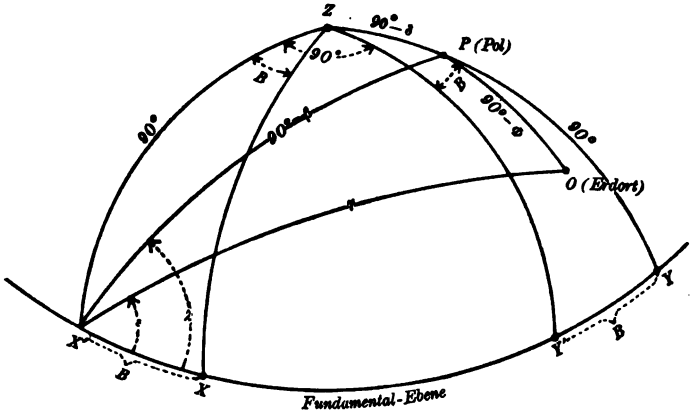


Fig. 20.

Der Pol der Erde P sei auf der Erdkugel gegen den Punkt X' durch die Distanz $X'P = 90^0 - \beta$ und den Winkel $PX'Y' = \lambda$ festgelegt, der Erdort O durch die Distanz $X'O = \gamma$ und den Winkel $OX'Y' = \varepsilon$. Für die nachstehenden Transformationen beachte man, daß $90^0 - \beta > 90^0$, folglich $\cos(90^0 - \beta)$ und ebenso $\cos\gamma$ (weil in der Figur $\gamma > 90^0$) negatives Vorzeichen erhalten müssen. Man hat dann unmittelbar aus der Figur auf Grund des Kosinussatzes:

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos(PX') = \sin\beta \quad\;\; = \cos\delta \sin B, \\ \cos(PY') = \cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos B, \\ \cos(PZ) = \cos\beta\sin\lambda = \sin\delta, \end{cases}$$

woraus folgt, daß β und λ konstante Größen sind. Es soll hinsichtlich der Wahl des Quadranten von β festgesetzt werden, daß $\cos\beta$ stets positiv wird.

Ferner erhält man aus der Figur:

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = \cos(OX) = -\cos\gamma\cos B + \sin\gamma\sin B\cos\varepsilon, \\ \eta = \cos(OY) = \quad\cos\gamma\sin B + \sin\gamma\cos B\cos\varepsilon, \\ \zeta = \cos(OZ) = \quad\sin\gamma\sin\varepsilon, \end{cases}$$

wo $\sin\gamma$ auf positive Werte beschränkt sein soll.

Führt man diese Werte der Koordinaten in die Bedingungsgleichung (1) ein, so wird dieselbe:

$$\cos\gamma = -x_0\cos B + y_0\sin B \pm k, \tag{5}$$

d. h. der Winkel γ ist eine konstante Größe, wenn x' und y' als konstant betrachtet werden. Weiter erhält man durch Einführung der Beziehungen (4) in die Gleichung (2):

$$\sin\Phi = \cos\gamma\cos\delta\sin B + \sin\gamma\cos\varepsilon\cos\delta\cos B + \sin\gamma\sin\varepsilon\sin\delta, \tag{6}$$

oder unter Berücksichtigung der Relationen (3):

$$\sin\Phi = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma\cos(\lambda-\varepsilon), \tag{7}$$

worin jetzt Φ und ε die einzigen veränderlichen Größen sind. Da $\cos\beta\sin\gamma$ positiv ist, wird der maximale Wert von $\sin\Phi$ erreicht, wenn $\cos(\lambda-\varepsilon) = 1$ oder $\lambda - \varepsilon = 0$ ist; der minimale, wenn $\cos(\lambda-\varepsilon) = -1$ oder $\lambda - \varepsilon = 180^0$ ist. Also hat man für die Grenzen: $\sin\Phi = \sin(\beta \pm \gamma)$, d. h.

$$\text{für die nördliche Grenze } \Phi = \beta + \gamma,$$

$$\text{für die südliche Grenze } \Phi = \beta - \gamma.$$

Von den so gefundenen Grenzpunkten muß einer auf der dem Mond abgekehrten Seite der Erde liegen, weil die vom Stern senkrecht zur Mondscheibe laufende Linie die Erdoberfläche in zwei Punkten schneidet, die der Koordinate $+\zeta$ und der Koordinate $-\zeta$ entsprechen. Hat ζ positives Vorzeichen, so muß nach (4) $\sin\varepsilon$ positiv, und folglich wegen $\lambda = \varepsilon$ auch $\sin\lambda$ positiv sein. Dies ist aber wegen der Gleichung $\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta$ nur möglich, wenn δ positiv ist, d. h. der Stern nördlich vom Äquator steht. Die Formel $\Phi = \beta + \gamma$ gibt also die größte nördliche Breite der Sichtbarkeit nur für Sterne mit Norddeklination. Durch analoge Überlegungen folgert man, daß die Formel $\Phi = \beta - \gamma$ die größte südliche Breite nur für Sterne mit Süddeklination gibt.

Die zweite Grenze für die Sichtbarkeit einer Sternbedeckung ist offenbar einer von den vier Punkten, in welchen die nördliche oder südliche Grenzkurve von der westlichen oder östlichen Grenzkurve (Kurven des Anfangs und Endes der Okkultation bei Mondauf- und Untergang) berührt werden. Diese Berührungspunkte müssen die Bedingung erfüllen $\zeta = 0$ und folglich nach Formel (4)

auch die weitere $\sin\varepsilon = 0$, $\cos\varepsilon = \pm 1$, womit die Formel (6) für $\sin \Phi$ auf die folgende reduziert wird:

$$(8)\quad \sin\Phi = (\sin B\cos\gamma \pm \cos B\sin\gamma)\cos\delta = \sin(B \pm \gamma)\cos\delta.$$

Sofern man hierin $\cos B$ auf positive Werte beschränkt, erhält man mit dem oberen Zeichen aus dieser Gleichung die größte Nordbreite, wenn die Südbreite (für negative Deklinationen) aus $\Phi = \beta - \gamma$ gefunden ist. Und umgekehrt, wenn die Nordbreite (für positive Deklinationen) aus $\Phi = \beta + \gamma$ gefunden ist, gibt die vorstehende Gleichung mit dem unteren Zeichen die größte Südbreite.

Die Winkel β und γ, welche zur Ermittlung der Grenzbreiten erforderlich sind, werden aus der ersten der Gleichungen (3) und aus (5) gefunden. Die letztere vereinfacht sich, wenn man die Epoche T_0 mit der Konjunktionszeit von Stern und Mond in Rektaszension identifiziert; denn da dann $x_0 = 0$ ist, hat man:

$$\cos\gamma = y_0 \sin B \pm k.$$

Mit Rücksicht auf die obigen Erwägungen ergibt sich schließlich folgende Formelzusammenstellung:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{Deklination } \delta \text{ positiv:} & \\ \cos\gamma_1 = y_0\sin B + 0.2725, & \cos\gamma_2 = y_0\sin B - 0.2725, \\ \sin\beta = \sin B\cos\delta, & \sin\Phi_2 = \sin(B-\gamma_2)\cos\delta, \\ \text{Nördl. Grenze } \Phi_1 = \beta + \gamma_1, & \text{Südliche Grenze.} \\ \text{Deklination } \delta \text{ negativ:} & \\ \cos\gamma_2 = y_0\sin B + 0.2725, & \cos\gamma_1 = y_0\sin B - 0.2725, \\ \sin\Phi_2 = \sin(B+\gamma_2)\cos\delta, & \sin\beta = \sin B\cos\delta, \\ \text{Nördliche Grenze.} & \text{Südl. Grenze } \Phi_1 = \beta - \gamma_1. \end{cases}$$

Dabei muß sein $\gamma < 180^0$ und $\beta < 90^0$, und weiter $B < 90^0$, d. h. B ist aus der Formel zu bestimmen:

$$(10)\quad \operatorname{tg} B = \frac{x_0'}{y_0'},$$

wobei x' und y' stets positiv zu nehmen sind, welches Vorzeichen sie auch haben mögen. Diese Bedingung folgt aus den Beziehungen (7) und (8); denn da $\cos B$ positiv sein

muß und wegen $\sin\beta = \sin B \cos\delta$ auch $\sin B$ positiv, so muß auch $B < 90^0$ sein.

Wenn der Schattenzylinder nach Norden oder Süden über die Erde hinausreicht, werden die Werte von γ_1 oder γ_2 imaginär. Ist $\cos\gamma_1$ imaginär, so sind die äußersten Grenzen $\Phi_1 = +90^0$ oder $\Phi_1 = -90^0$, je nach dem Zeichen von δ; ist dagegen $\cos\gamma_2$ imaginär, so hat man $\Phi_2 = \delta - 90^0$ oder $\Phi_2 = \delta + 90^0$, je nachdem δ positiv oder negativ ist.

In dem Fall, daß $\Phi_1 = \beta \pm \gamma_1$ größer als 90^0 ist, folgt der wahre Wert entweder aus $\Phi_1 = 180^0 - (\beta \pm \gamma_1)$ oder aus $\Phi_1 = -180^0 - (\beta \pm \gamma_1)$.

Als Beispiel diene die Bestimmung der Grenzparallele für die Sichtbarkeit der Okkultation von ξ^{I} Librae am 17. April 1908. Mit den in Nr. 25 gefundenen Elementen:

$$y_0 = -0.5207, \quad x_0' = +0.5458, \quad y_0' = -0.1999$$

und $\delta = -11^0 31.5'$ erhält man:

B	$= 69^0 53'$	$\log\sin B$	$= 9.9727$
$y_0 \sin B$	$= -0.4889$	$\log\cos\delta$	$= 9.9912$
$\mp k$	$= \mp 0.2725$	$\log\sin\beta$	$= 9.9639$
$\cos\gamma_1$	$= -0.7614$	β	$= 66^0 56'$
$\cos\gamma_2$	$= -0.2164$	γ_1	$= 139\ 36$
γ_2	$= 102^0 30'$		
$B + \gamma_2$	$= 172\ 23$	Φ_1	$= -73^0$ (südl. Grenze)
$\log\sin(B+\gamma_2)$	$= 9.1224$		
$\log\cos\delta$	$= 9.9912$	Φ_2	$= 7^0$ (nördl. Grenze)
$\log\sin\Phi_2$	$= 9.1136$		

27. Prädiktion der Phasen einer Sternbedeckung für einen gegebenen Erdort innerhalb des Sichtbarkeitsbereiches.

Die Bestimmung der Elemente einer Sternbedeckung und der Grenzparallelkreise ihrer Sichtbarkeit liegt den Berechnern der astronomischen Ephemeriden ob. Die Aufgabe dagegen, auf Grund dieser Angaben die Verhältnisse einer Okkultation für einen gegebenen Erdort innerhalb des Bereiches der Sichtbarkeit vorauszubestimmen, fällt dem an diesem Phänomen interessierten Astro-

nomen zu. Der Gang der Rechnung ist aus dem folgenden Beispiel ersichtlich, wobei sich die Nummern auf die Formeln der Nr. **24** beziehen.

Für die am 17. April 1908 stattfindende Mondbedeckung von ξ^{I} Librae sind die Zeiten der Immersion und Emersion und die Positionswinkel für die Sternwarte am Kap der guten Hoffnung zu bestimmen.

Die geographischen Koordinaten der Beobachtungsstation sind nach dem Nautical Almanac:

$$l = 1^h 13^m 54.8^s \qquad \Phi = -33^0 56' 3.5''$$

$$\log \varrho = 9.99954 \qquad \text{Redukt.} = + \quad 10\,51.3$$

$$\text{Geozentrische Breite } \Phi' = -33\ 45{,}2$$

$$\log \varrho \sin \Phi' = 9.74433_n, \qquad \log \varrho \cos \Phi' = 9.91936.$$

Die Sternkoordinaten von ξ^{I} Librae sind (Nr. **25**):

$$\alpha = 14^h 49^m 24^s, \qquad \delta = -11^0 31' 29''$$

Ausgangsepoche der Rechnung ist die Konjunktionszeit:

$$T_0 = 12^h 20^m 58^s.$$

Die dazu gehörigen Elemente sind (Nr. **25**):

$$y_0 = -0.5207, \quad x_0' = +0.5458, \quad y_0' = -0.1999.$$

(Formel 1):

$T_0 =$	$12^h 20^m 58^s$	$\log \varrho \cos \Phi' =$	9.91936
$l =$	1 13 55	$\log \sin \vartheta =$	9.09152
$T_0 + l =$	13 34 53	$\log \xi_0 =$	9.01088
Sternz. i. M.[1]) =	1 40 39		
Redukt. =	2 14	$\xi_0 =$	+0.10254
$\mu =$	15 17 46	Num. I. =	−0.54385
$\alpha =$	14 49 24	− Num. II. =	+0.16467
$\vartheta =$	0 28 22	$\eta_0 =$	−0.37918
	7^0 5′ 30″		

1) Die Sternzeit im mittl. Mittag 1908 April 17 ist für Greenwich $1^h 40^m 51^s$. Um die Sternzeit im mittl. Mittag für einen Ort zu

$\log \varrho \sin \Phi' = 9.74433_n$ $\log \varrho \cos \Phi' = 9.91936$

$\log \cos \delta = 9.99115$ $\log \sin \delta = 9.30059_n$

$\log \mathrm{I} = 9.73548_n$ $\log \cos \vartheta = 9.99667$

$\log \mathrm{II} = 9.21662_n$

(Formel 2):

$\log \mathrm{Const.} \cdot \varrho \cos \Phi' = 9.33852$ $\log \mathrm{Const.} \cdot \varrho \cos \Phi' = 9.33852$

$\log \cos \vartheta = 9.99667$ $\log \sin \vartheta \sin \delta = 8.39211_n$

$\log \xi' = 9.33519$ $\log \eta' = 7.73063_n$

$\xi' = +0.21636$ $\eta' = -0.00538$

(Formel 3):

$\log a \sin A = 9.01089_n$ $\log b \sin B = 9.51778$

$\log a \cos A = 9.15082_n$ $\log b \cos B = 9.28896_n$

$\log \mathrm{tg}\, A = 9.86007$ $\log \mathrm{tg}\, B = 0.22882_n$

$A = 215^0 55{,}5'$ $B = 120^0 33.6'$

$\log a = 9.24246$ $\log b = 9.58272$

(Formel 4):

$\log a \sin(A-B) = 9.24055$

$\log k = 9.43540$

$\log \sin(\alpha - B) = 9.80515$

$\alpha' - B = 140^0 19.3'$

$\alpha'' - B = 39\ 40.7$

$T_0 = 12^h 20^m 58^s$

$\tau' = -30\ 20$

$T_0 + \tau' = 11\ 50\ 38$

$l = 1\ 13\ 55$

Immersion $T' = 13\ 4\ 33$

(Formel 5):

$-\frac{a \cos(A-B)}{b} = 0.0427^h$

$\frac{k \cos(\alpha - B)}{b} = \mp 0.5482^h$

$\tau' = -0.5055^h$

$\tau'' = +0.5909$

$T_0 = 12^h 20^m 58^s$

$\tau'' = +35\ 27$

$T_0 + \tau'' = 12\ 56\ 25$

$l = 1\ 13\ 55$

Emersion $T'' = 14\ 10\ 20$

mittl. Lokalzeit Kapstadt.

---

erhalten, dessen östl. Länge v. Greenw. l ist, hat man von der Greenw. Sternzeit $-\ 9.86^s \cdot l$ zu subtrahieren, wo l in Einheiten der Stunde zu nehmen ist. Für Kap der guten Hoffnung beträgt diese Korrektion $-\ 12.14^s$.

Die Werte sind bis auf eine halbe Zeitminute genau und daher genügend für die Prädiktion. Zur Erzielung größerer Genauigkeit sind die mit der Zeit veränderlichen Größen für jede Phase der Okkultation getrennt zu ermitteln, und damit ist die Rechnung abermals auszuführen.

Die Positionswinkel sind (Formel 6):

$$P' = 180^0 + \alpha' = 180^0 + 261^0 = 81^0,$$
$$P'' = 180^0 + \alpha'' = 180^0 + 160^0 = 340^0.$$

Die vom Vertex der Mondscheibe aus gezählten Winkel ergeben sich aus:

	Immersion	Emersion
$\xi_0 + \xi' \cdot \tau = \varrho p \sin q =$	$- 0.0068$	$+ 0.2304$
$\eta_0 + \eta' \cdot \tau = \varrho p \cos q =$	$- 0.3765$	$- 0.3824$
q	181^0	149^0
$V = P - q$	260	191

Astronomie, unter Mitwirkung von E. Anding, J. Bauschinger, A. Bemporad, E. W. Brown, C. Ed. Caspari, C. V. L. Charlier, F. Cohn, R. Emden, F. K. Ginzel, J. v. Hepperger, G. Herglotz, H. Kobold, F. R. Moulton, G. v. Niessl, S. Oppenheim, L. Schulhof, E. Strömgren, K. Sundman, E. T. Whittaker, A. Wilkens, C. W. Wirtz, H. v. Zeipel, redigiert von K. Schwarzschild. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band VI, 2. Man verlange Prospekt!

Geodäsie und Geophysik, unter Mitwirkung von R. Bourgeois, G. H. Darwin, F. Exner, S. Finsterwalder, F. R. Helmert, S. Hough, H. Meldau, J. M. Pernter, P. Pizzetti, C. Reinhertz †, A. Schmidt, W. Trabert, redigiert von Ph. Furtwängler und E. Wiechert. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band VI, 1. In 2 Teilbänden. Man verlange Prospekt!

Physik, unter Mitwirkung von M. Abraham, L. Boltzmann, G. H. Bryan, P. Debye, H. Diesselhorst, H. Dubois, Fr. Emde, S. Finsterwalder, R. Gans, F. W. Hinrichsen, E. W. Hobson, J. H. van t'Hoff, H. Kamerlingh-Onnes, M. Laue, Th. Liebisch, H. A. Lorentz, L. Mamlock, G. Mie, †H. Minkowski, O. Mügge, J. Nabl, F. Pockels, L. Prandtl, R. Reiff, K. Runge, A. Schönflies, M. Schröter, E. Study, A. Wangerin, W. Wien, J. Zenneck, redigiert von A. Sommerfeld. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band V. In 3 Teilen. Man verlange Prospekt!

Bock, H., die Uhr, Grundlagen und Technik der Zeitmessung. Mit 47 Abbildungen im Text [IV u. 136 S.] 8. Geh. n. ℳ 1.—, geb. n. ℳ 1.25.

v. Brill, A., Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Mit 27 Figuren im Text. [X u. 236 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 7.—, in Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Bruns, H., Vorlesungen über Astronomie. [ca. 250 S.] gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

Darwin, G. H., Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der 2. englischen Auflage von A. Pockels. Mit Einführungswort von G. v. Neumayer und 46 Textillustrationen. [XXII u. 344 S.] 8. 1902. Geb. n. ℳ 6.80.

Debye, P., optische Untersuchungen über Lichtdruck, Regenbogen und andere Beugungserscheinungen. Ein Beitrag zur Behandlung optischer Fragen im Sinne von Randwertaufgaben. [ca. 100 S.] gr. 8. Geb. [Erscheint im Frühjahr 1910.]

Emden, R., Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln im Text. [VI u. 498 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 13.—

Galilei, G., Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von E. Strauß. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. ℳ 16.—, geb. n. ℳ 18.50

Gauß, C. F., Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. gr. 4. Kart.
V: Mathematische Physik. 2. Abdr. [642 S.] 1877. n. ℳ 25.—
VI: Astronomische Abhandlungen. 2. Abdr. [664 S.] 1874. n. ℳ 33.—
VII: Theoria motus und Theoretisch-Astronomischer Nachlaß. (Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes.) [680 S.] 1906. n. ℳ 30.—

Gilbert, O., die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums. Von der Kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften mit dem Zographospreise gekrönt. Mit 12 Figuren im Text. [V u. 746 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 20.—, geb. n. ℳ 22.50.

Grebe, L., Spektroskopie. Mit 62 Figuren im Text und auf 2 Doppeltafeln. [IV u. 110 S.] 8. 1910. Geh. n. ℳ 1.—, geb. n. ℳ 1.25.

Grimsehl, E., Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. Mit 1091 Figuren im Text, 2 farbigen Tafeln und einem Anhange, enthaltend Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. [XII u. 1052 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 15.—, geb. n. ℳ 16.—

Helmert, F. R., die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente. 2. Aufl. [XVIII u. 578 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Herglotz, G., Lehrbuch der Kugel- und verwandten Funktionen. Mit physikalischen und astronomischen Anwendungen. gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

Höfler, A., Didaktik der Himmelskunde und astronomischen Geographie. gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

Holzmüller, G., elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte. Einige Vorträge. Mit 8 Figuren im Text. [VI u. 98 S.] 8. 1906. Geh. n. ℳ 1.80.

Keplers, J., Traum oder nachgelassenes Werk über die Astronomie des Mondes. Übersetzt und kommentiert von L. Günther. Mit dem Bildnis Keplers, dem Faksimile-Titel der Original-Ausgabe, 24 Textabbildungen und 2 Tafeln. [XXII u. 186 S.] gr. 8. 1898. Geh. n. ℳ 8.—

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. Band I. Mit 40 Figuren im Text. [IV u. 489 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 16.—, geb. n. ℳ 17.— [Band II in Vorbereitung.]

Poincaré, H., sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Gehalten zu Göttingen vom 22.–28. April 1909. Mit 6 Figuren im Text. [IV u. 60 S.] gr. 8. 1910. Geh. n. ℳ 1.80, in Leinwand geb. n. ℳ 2.40.

Pringsheim, E., Vorlesungen über Physik der Sonne. Mit 235 Figuren im Text und 7 Tafeln. [VIII u. 436 S.] gr. 8. Geb. [Erscheint im Frühjahr 1910.]

Scheiner, J., populäre Astrophysik. Mit 30 Tafeln und 210 Fig. im Text. [VI u. 718 S.] gr. 8. 1908. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Schoy, C., Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Mit 3 Figuren im Text und 8 Tafeln. [VII u. 40 S.] gr. 8. 1910. Geh. n. ℳ 1.60.

Schupmann, L., die Medialfernrohre. Eine neue Konstruktion für große astronomische Instrumente. Mit 28 Figuren im Text. [V u. 146 S.] gr. 8. 1898. Geh. n. ℳ 4.80.

Schwarzschild, K., Astrophysik. gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

——— über das System der Fixsterne. Aus populären Vorträgen. Mit 13 Figuren im Text. [44 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 1.—

v. Seeliger, H., Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper. Geb. [In Vorbereitung.]